TS3 : corrigé du contrôle (récurrence, suites)
(2 heures)

I — 2 points

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si, pour tout $A > 0$, l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ contient tous les termes de la suite partir d'un certain rang.

II — 2,5 points

Soit P_n la propriété :« il existe un entier $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $7^n - 1 = 6k_n$ ».
Démontrons-la par récurrence :

- **Initilisation** : pour $n = 0$, $7^n - 1 = 7^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 6 \times 0 = 6 \times k_0$ avec $k_0 = 0 \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, $7^n - 1$ est bien un multiple de 6.
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un en tier n quelconque.
  Il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $7^n - 1 = 6k_n$.
  On en déduit que $7^n = 6k_n + 1$.
  Alors : $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7 \times (6k_n + 1) - 1) = 7 \times 6k_n + 7 - 1 = 6k_n + 6 = 6(7k_n + 1) = 6k_{n+1}$ en appelant k_{n+1} le nombre $7k_n + 1 \in \mathbb{N}$.
  La propriété est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III — 2,5 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3)$$

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1).$$

On remarque S_n est une somme de n termes puisque le premier terme est $1 = 4 \times 1 - 3$ et le dernier terme est $4n - 3$.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, $S_1 = 1$ et $n(2n - 1) = 1 \times 1 = 1$ donc $S_n = n(2n - 1)$ est vrai pour $n = 1$.
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque.
  $S_n = 1 + 5 + \cdots + 4n - 3 = n(2n - 1)$.
  Alors : $S_{n+1} = S_n + [4(n+1) - 3] = S_n + 4n + 1 = n(2n - 1) + 4n + 1 = 2n^2 + 3n + 1$.
  Or $(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1$ donc $S_{n+1} = \boxed{(n+1)(2(n+1) - 1)}$.
  La propriété est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV 4 points

1. Un capital initial c_0 de 600 euros est placé sur un compte rapportant 5 % d'intérêts annuels. On note c_n le capital acquis au bout de n années (n entier naturel).

   (a) $c_{n+1} = c_n + c_n \times 5\,\% = c_n\left(1+\dfrac{5}{100}\right) = c_n \times 1,05 = \boxed{1,05c_n}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = 1,05c_n$ donc la suite (c_n) est géométrique, de raison $q = 1,05$.
   Son premier terme est $c_0 = 600$ donc $c_n = c_0 q^n$ d'où $\boxed{c_n = 600 \times 1,05^n}$.

   (c) À la calculatrice, cela revient à chercher la plus petite valeur de n telle que $1,05^n \geqslant 3$. On trouve $\boxed{n = 23}$.

2. Un autre épargnant place également un capital initial de 600 euros au taux annuel de 5 % d'intérêts, et fait un versement supplémentaire de 150 euros à la fin de chaque année. On appelle d_0 le capital initial et d_n le capital ainsi acquis à la fin de la n-ième année.

   (a)
   - $d_1 = d_0 + d_0 \times 5\,\% + 150 = 1,05d_0 + 150 = 780$
   - $d_2 = 1,05d_1 + 150 = 969$
   - $d_3 = 1,05d_2 + 150 = 1167,45$

   (b) Pour tout d_n, $d_{n+1} = d_n + d_n \times 5\,\% + 150 = \boxed{1,05d_n + 150}$

   (c) Soit (v_n) la suite définie par :
   $$v_n = d_n + 3\,000.$$
   $v_0 = d_0 + 3\,000 = \boxed{3\,600}$ et $v_1 = d_1 + 3\,000 = \boxed{3\,780}$.

   (d) Pour tout n, $v_{n+1} = d_{n+1} + 3\,000 = 1,05d_n + 150 + 3\,000 = 1,05d_n + 3\,150 = 1,05\left(d_n + \dfrac{3\,150}{1,05}\right)$
   $= 1,05\,(d_n + 3000) = \boxed{1,05v_n}$.
   Pour tout n, $v_{n+1} = 1,05v_n$ donc la suite (v_n) est **géométrique** de raison $q = 1,05$.

   (e) On en déduit que : $v_n = v_0 q^n$ donc $\boxed{v_n = 3\,600 \times 1,05^n}$.

   (f) $d_n = v_n - 3\,000$ donc $\boxed{d_n = 3\,600 \times 1,05^n - 3000}$

   (g) À la calculatrice, on trouve que le capital a triplé au bout de 6 ans.

V 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 \geqslant 0$ car $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 0$.
   On en déduit que la suite (u_n) est **croissante**.
2. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
   - **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0^2 = 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque.
     Donc $u_n > n^2$.
     Alors : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 = \left(n^2 + 2n + 1\right) + 2 = (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2 + 2$.
     Par conséquent : $u_{n+1} > (n+1)^2$.
     La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

3. Démontrons que la suite $\left(n^2\right)$ n'est pas majorée.
   Soit $A > 0$ un réel positif quelconque. Pour tout entier $n > \sqrt{A}$, $n^2 > A$ donc la suite $\left(n^2\right)$ n'est pas majorée.
4. Pour tout n, $u_n > n^2$ et la suite $\left(n^2\right)$ n'est pas majorée, donc la suite (u_n) non plus.
   La suite (u_n) est croissante non majorée, donc tend vers $+\infty$: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$
5.
   - $u_1 = u_{0+1} = u_0 + 2\times 0 + 3 = \boxed{4}$
   - $u_2 = u_1 + 2\times 1 + 3 = \boxed{9}$
   - $u_3 = u_2 + 2\times 2 + 3 = \boxed{16}$
   - $u_4 = u_3 + 2\times 3 + 3 = \boxed{25}$
6. On peut conjecturer que $\boxed{u_n = (n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Démontrons cette conjecture par récurrence :
   - **Initialisation** : Pour $n = 0$, $(n+1)^2 = 1 = u_0$ donc $u_0 = (0+1)^2$.
   - **Hérédité** : on suppose que pour un rang n quelconque, $u_n = (n+1)^2$.
     Alors : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2$.
     La propriété est **héréditaire**.

   Elle est donc vraie pour tout n : $\boxed{u_n = (n+1)^2}$

VI 4 points

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout $n \geqslant 1$: $n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1$.
Ce tableau donne les dix premiers termes de la suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. On a : $10 w_{10} = 11 w_9 + 1 = 11\times 19 + 1 = 210$ donc $\boxed{w_{10} = 21}$.
2. La suite semble être la suite des entiers impairs, donc arithmétique de raison 2 et de premier terme 1, donc on peut conjecturer que $\boxed{w_n = 2n+1}$.
3. On effectue une démonstration par récurrence.
   - **Initialisation** : Pour $n = 0$, $2n + 1 = 1 = u_0$ donc c'est vrai au rang $n = 0$.
   - **Hérédité** : on suppose que $w_n = 2n+1$.
     Alors : $(n+1) w_{n+1} = (n+2) w_n + 1 = (n+2)(2n+1) + 1 = 2n^2 + 5n + 3 = (n+1)(2n+3)$ donc
     $w_n = 2n + 3 = 2(n+1) + 2$.
     La propriété est bien héréditaire.

   On en déduit qu'elle est vraie pour tout n, donc $\boxed{w_n = 2n+1}$.
4. Alors : $w_{2000} = 2\times 2\,000 + 1 = \boxed{4\,001}$