TS : correction du TD fonction exponentielle (1)

I

On rappelle que exp est l'unique fonction non nulle dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On cherche une fonction f non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = \lambda \end{cases}$ $\quad \lambda \neq 0$.

Pour cela, on pose $g = \dfrac{1}{\lambda} f$.

1. $g' = \left(\dfrac{1}{\lambda f}\right)' = \dfrac{1}{\lambda} f' = \dfrac{1}{\lambda} f = g$ donc $\boxed{g' = g}$

   $g(0) = \dfrac{1}{\lambda} f(0) = \dfrac{1}{\lambda} \times \lambda = 1$ donc $g(0) = 1$
2. Puisque $g' = g$ et $g(0) = 1$, g est la fonction exponentielle : $g = \exp$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \exp(x) = \dfrac{1}{\lambda} f(x)$ donc $\boxed{f(x) = \lambda \exp(x)}$.

II

On cherche une fonction f, non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\begin{cases} f' = kf \\ f(0) = 1 \end{cases}$ $\quad k \in \mathbb{R}$.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = \exp(kx)$.
   - $g = \exp(u)$ donc $g' = u' \exp(u)$ d'où $g'(x) = k \exp(kx)$ donc $\boxed{g' = kg}$.
   - $g(0) = \exp(k \times 0) = \exp(0) = \boxed{1}$

   g vérifie les deux conditions donc g convient.
2. Pour montrer l'unicité d'une telle fonction, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une autre fonction h telle que $\begin{cases} h' = kh \\ h(0) = 1 \end{cases}$ $\quad k \in \mathbb{R}$.

   Alors : $\left(\dfrac{g}{h}\right)' = \dfrac{g'h - gh'}{h^2} = \dfrac{kgh - gkh}{h^2} = 0$.

   Comme $\left(\dfrac{g}{h}\right)' = 0$, $\dfrac{g}{h}$ est une fonction constante : pour calculer cette constante, on calcule la valeur de la fonction en 0 : $\dfrac{g}{h}(0) = \dfrac{g(0)}{h(0)} = 1$ donc $\dfrac{g}{h} = 1$.

   On a donc $\dfrac{g}{h} = 1$ donc $\boxed{g = h}$ et on a unicité de la fonction.
3. Cherchons une fonction f telle que $\begin{cases} f' = 2f \\ f(0) = 1 \end{cases}$.
   D'après ce qui précède, on a $f(x) = \exp(2x)$.
4. Pour avoir une fonction f telle que $\begin{cases} f' = 2f \\ f(0) = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on combine les résultats précédents : on a

$$f(x) = \lambda \exp(2x)$$

III

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Si, pour tout x réel, on a $f'(x) = f(x)$, peut-on affirmer que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que , pour tout x réel, $f''(x) = f(x)$?
   Oui : puisque f est dérivable et $f' = f$, f' est dérivable (puisque f l'est) et $f' = f \Rightarrow f'' = \left(f'\right)' = f' = f$ donc $\boxed{f'' = f}$
2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(x)$, peut-on affirmer que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = f(x)$?
   Non : on prend $f(x) = \exp(-x) = \exp(kx)$ avec $k = -1$.
   Alors $f' = kf = -f$ (cf. I) et $f'' = \left(f'\right)' = \left(-f\right)' = -f' = -(-f) = f$ donc $f'' = f$ mais $f'' = -f'$.

IV

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \exp(3x+4)$; $f = \exp \circ u$ avec $u(x) = 3x+4$; $f' = u' \exp \circ u u' \exp(u)$ donc $\boxed{f'(x) = 3\exp(3x+4)}$.
2. $f(x) = x\exp(2x)$; $f = uv$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \exp(2x)$.
   $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2\exp(2x)$.
   On en déduit que : $f'(x) = 1 \times \exp(2x) + x \times 2\exp(2x) = \boxed{(2x+1)\exp(2x)}$
3. $f(x)\sqrt{\exp(x)}$; $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = \exp(x)$ dnc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u'(x) = \exp(x)$.
   Par conséquent : $f'(x) = \boxed{\dfrac{\exp(x)}{2\sqrt{\exp(x)}}}$.
4. $f(x) = (\exp(x))^3$; $f = u^3$ avec $u = \exp$ donc $f' = 3u'u^2$ avec $u' = u = \exp$.
   Par conséquent : $f' = 3u'u^2 = 3uu^2 = 3u^3 = 3\exp^3$ donc $\boxed{f'(x) = 3\left(\exp(x)\right)^3}$.

   Remarque : Après que nous avons vu la propriété $\left(\exp(x)\right)^n = \exp(nx)$, nous pouvons utiliser :
   $f(x) = \left(\exp(x)\right)^3 = \exp(3x)$ donc $\boxed{f'(x) = 3\exp(3x)}$ puisque $\left(\exp(v)\right)' = v'\exp(v)$