TS : correction des exercices sur les représentations paramétriques de droites

I Vrai ou Faux ?

La droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -3t \\ z = 2-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

a) passe par le point A(-1 ; 0 ; 2)

VRAI : on obtient ces coordonnées pour $t = 0$

b) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

FAUX : un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ obtenu avec les coefficients du paramètre.

Il est clair que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires donc $\overrightarrow{u}$ n'est pas un vecteur directeur de cette droite.

c) passe par le point B(1 ; -3 ; -1)

VRAI : on regarde s'il existe une valeur de t telle que $\begin{cases} -1+2t = 1 \\ -3t = -3 \\ 2-t = -1 \end{cases}$

La deuxième équation donne $t = 1$ et en remplaçant t par 1, les deux autres équations sont vérifiées.B est atteint pour $t = 1$ et appartient bien à la droite $\mathscr{D}$.

d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

VRAI : Soit $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{w}$ donc $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires ; $\overrightarrow{v}$ est donc également un vecteur directeur de cette droite $\mathscr{D}$.

e) est parallèle à la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3-2s \\ y = 1+3s \\ z = s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$

VRAI : appelons Δ cette droite ; elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ (cf. question précédente). Δ et $\mathscr{D}$ ont comme vecteurs directeurs des vecteurs colinéaires : elles sont bien parallèles.

f) ne coupe pas l'axe des ordonnées

VRAI : les points de l'axe des ordonnées ont une abscisse nulle et une cote nulle ; on cherche donc s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} -1+2t = 0 \\ -t = 0 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 2 \end{cases}$.

Ces deux équations sont incompatibles, donc $\mathscr{D}$ ne coupe pas l'axe des ordonnées.

g) coupe l'axe des cotes au point C(3 ; -6 ; 0)

FAUX : les points de l'axe des cotes ont une abscisse et une ordonnée nulle ; C n'appartient donc pas à cet axe !

II

On considère les points A$(0\,;1\,;2)$, B$(1\,;2\,;3)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

1. Une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est
$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\overrightarrow{u}} \\ y = y_A + t y_{\overrightarrow{u}} \\ z = z_A + t z_{\overrightarrow{u}} \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}}$$

2. De même, une représentation paramétrique de la droite (d') passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ est :
$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2 + 2s \\ z = 3 + s \end{cases},\ s \in \mathbb{R}}$$

3. Le point C(6; -8; -2) appartient à (d) s'il existe t tel que $\begin{cases} t = 6 \\ 1 + t = -8 \\ 2 + t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -9 \\ t = -4 \end{cases}$, système incompatible. $\boxed{\text{C n'appartient pas à } (d)}$.

   Le point C(6; -8; -2) appartient à (d') s'il existe s tel que $\begin{cases} 1 - s = 6 \\ 2 + 2s = -8 \\ 3 + s = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -5 \\ s = -5 \\ s = -5 \end{cases} \Leftrightarrow s = -5$.

   $\boxed{\text{C appartient à } (d') \text{ pour } s = -5}$.

4. (d) et (d') sont sécantes s'il existe un coupe $(t\,;\ s)$ tel que
$\begin{cases} t = 1 - s \\ 1 + t = 2 + 2s \\ 2 + t = 3 + s \end{cases}$. On remplace t par $1 - s$:
$$\begin{cases} t = 1 - s \\ 1 + 1 - s = 2 + 2s \\ 2 + 1 - s = 3 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - s \\ 3s = 0 \\ 2s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - s \\ s = 0 \\ s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = 1 \end{cases}.$$
En remplaçant s par 0, on obtient $x = 1\,;\ y = 2\,;\ z = 3$: on retrouve le point B.
$\boxed{(d) \text{ et } (d') \text{ se coupent en B}}$.

III

On considère les trois droites dont les représentations paramétriques sont :

$$(d_1)\begin{cases} x=-t \\ y=3+t \\ z=1+2t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$$

$$(d_2)\begin{cases} x=3+2s \\ y=-2s \\ z=-5-4s \end{cases}, \ s\in\mathbb{R}$$

$$(d_3)\begin{cases} x=-2+4u \\ y=1+4u \\ z=1 \end{cases}, \ u\in\mathbb{R}$$

a) On cherche le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).

On résout le système :

$$\begin{cases} -t=3+3s \\ 3+t=-2s \\ 1+2t=4-4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3-3s \\ 3-3-3s=-2s \\ 1+2(-3-3s)=-5-4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3-3s \\ s=0 \\ s=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=0 \\ t=-3 \end{cases}.$$

(d_1) et (d_2) se coupent en A(3 ; 0 ; -5).

Reste à montrer que A appartient à (d_3).

Ce n'est pas le cas puisque $z_A \neq 1$!!! Les trois droites ne sont pas concourantes ; il y a une erreur d'énoncé.

b) Ces droites sont-elles coplanaires ?

On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs directeurs de chacun de ces droites.

On prend $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$. Il est clair que $\vec{v}=-2\vec{u}$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.

(d_1) et (d_2) sont donc parallèles. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ définissent un plan, défini par $\vec{u}$ et $\vec{w}$. Ces trois droites sont donc coplanaires.