Correction des exercices sur les suites

I Vrai ou faux ?

1. Si une suite n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

   FAUX : Soit une suite (u_n) non majorée. Pour tout $A>0$, il existe un terme u_n tel que $u_n > A$. Pour que la suite tende vers $+\infty$, il faudrait que **tous** les termes de la suite soient supérieurs à A à partir d'un certain rang.

   Contre-exemple : $\boxed{u_n=(-1)^n \times n}$; pour tout $A>0$, il existe un terme de la suite (de rang pair) supérieur A, mais comme la suite change alternativement de signe, elle ne peut tendre vers $+\infty$.

2. Si une suite n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.

   FAUX : même contre-exemple

3. Si une suite est strictement croissante alors elle tend vers $+\infty$.

   FAUX : contre-exemple : $u_n = 2-\dfrac{1}{n+1}$; (u_n) est croissante mais $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2}$

4. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.

5. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante.

   FAUX : contre-exemple : $u_n = n+(-1)^n$.

   - $(-1)^n \geqslant -1$ donc $u_n \geqslant n-1$;
     or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ (théorème de comparaison)
   - Étudions les variations de (u_n) :
     $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n$
     $=\left[n+1+(-1)^{n+1}\right]-\left[n+(-1)^n\right]$
     $=\left[n+1+(-1)\times(-1)^n\right]-\left[n+(-1)^n\right]$
     $=n+1-(-1)^n-n-(-1)^n$
     $=1-2\times(-1)^n=\begin{cases}3 \text{ si } n \text{ est impair}\\ -1 \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases}.$

     La suite (u_n) n'est donc pas croissante.

6. Toute suite bornée est convergente (c'est-à-dire possède une limite réelle).

   FAUX : contre-exemple : $u_n=(1)^n$. (u_n) est divergente (pas de limite) mais est bornée par -1 et 1.

7. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

   VRAI : c'est un théorème du cours.

II

Justifier les limites suivantes avec la définition :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+3=+\infty$

   Soit $A>0$ un réel quelconque. On veut montrer qu'il existe p tel que $n>p \Rightarrow 2n+3>A$.

   Or $2n+3>A \Leftrightarrow n>\dfrac{A-3}{2}$; tout entier p supérieur à $\dfrac{A-3}{2}$ convient.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+6=-\infty$

   Soit $A<0$ un réel quelconque. On veut montrer qu'il existe p tel que $n>p\Rightarrow -n+6<A$.

   Or $-n+6<AA \Leftrightarrow n>6-A$; tout entier p supérieur à $6-A$ convient.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$

   Fait en cours !

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 6-n^2=-\infty$

   Soit $A<0$ quelconque ; on cherche p tel que $n>p\Rightarrow 6-n^2<A$.

   Or : $6-n^2<A \Leftrightarrow 6-A<n^2 \Leftrightarrow \sqrt{6-A}<n$ (la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$).

   Tout entier p supérieur à $\sqrt{6-A}$ convient.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\sqrt{n}=+\infty$

   Soit $A>0$ un réel quelconque. On veut montrer qu'il existe p tel que $n>p\Rightarrow 5\sqrt{n}>A$.

   Or $5\sqrt{n}>A \Leftrightarrow 25n>A^2$ (la fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$) ; tout entier p supérieur à $\dfrac{A^2}{25}$ convient.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+3}{n+1}=+\infty.$

   On cherche a, b et c tels que $\dfrac{n^2+3}{n+1}=an+b+\dfrac{c}{n+1}$.

   $an+b+\dfrac{c}{n+1}=\dfrac{(an+b)(n+1)+c}{n+1}=\dfrac{an^2+(a+b)n+b+c}{n+1}.$

Pour que cette expression soit égale à $\dfrac{n^2+3}{n+1}$, les coefficients de n^2, n et constant doivent être les mêmes au numérateur.

D'où $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases}$

Donc : $\dfrac{n^2+3}{n+1} = n-1+\dfrac{4}{n+1}$.

$n-1+\dfrac{4}{n+1} > n-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$ (évident!) donc, d'après un théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3}{n+1}\right) = +\infty}.$$

On verra une autre méthode bientôt.

III

L'exercice sera fait en cours!

IV Exercice un peu difficile

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2}$.

1. On pose $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$.

   On obtient successivement : $u_0 = \boxed{1}$; $u_1 = f(1) = \boxed{\dfrac{5}{3}}$; $u_2 = f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \boxed{\dfrac{19}{11}}$; $u_3 = f\left(\dfrac{19}{11}\right) = \boxed{\dfrac{71}{41}}$

2. $f'(x) = \dfrac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$ donc f est **croissante** sur $]-2\,;\,+\infty[$.

3. $f(1) = \dfrac{5}{3}$; $f(\sqrt{3}) = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} = \dfrac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ donc $\boxed{f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}}$.

4. Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$:

   - **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 1 \geqslant 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité** : on suppose que la propriété est vraie au rang n, donc $u_n \geqslant 1$.

     f est croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$ donc $f(u_n) \geqslant f(1)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant \dfrac{5}{3} > 1$ donc $u_{n+1} \geqslant 1$.

     La propriété est héréditaire.

     D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n, donc $u_n \geqslant 1$.

5. Démontrons que la suite est majorée par $\sqrt{3}$.

   - **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 1 \leqslant \sqrt{3}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité** : on suppose que la propriété est vraie au rang n, donc $u_n \leqslant \sqrt{3}$.

     f est croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$ donc $f(u_n) \geqslant f\left(\sqrt{3}\right)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant \sqrt{3}$ puisque $f\left(\sqrt{4}\right) = \sqrt{3}$ donc $u_{n+1} \leqslant \sqrt{3}$.

     La propriété est héréditaire.

     D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n, donc $u_n \leqslant \sqrt{3}$.

6. Montrons par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante en montrant que, pour tout n, $u_{n+1} > u_n$ pour tout n.

   - **Initialisation** : $u_1 = \dfrac{5}{3} > 1 = u_0$ donc $u_1 > u_0$
   - **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque donc $u_{n+1} > u_n$.

     Comme f est croissante, $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ (conservation de l'ordre) donc $u_{n+2} > u_{n+1}$: la propriété est héréditaire.

     Elle est donc vraie pour tout n : la suite (u_n) est croissante.

7. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$$

.

(a) Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

Pour tout n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \dfrac{\frac{2u_n+3}{u_n+2} - \sqrt{3}}{\frac{2u_n+3}{u_n+2} + \sqrt{3}} = \dfrac{\dfrac{(2-\sqrt{3}u_n + 3 - 2\sqrt{3})}{u_n+2}}{\dfrac{(2+\sqrt{3}u_n + 3 + 2\sqrt{3})}{u_n+2}}$

$= \dfrac{(2-\sqrt{3})u_n + 3 - 2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})u_n + 3 - 2\sqrt{3}} = \dfrac{(2-\sqrt{3})u_n - \sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})u_n + \sqrt{3}(2+\sqrt{3})} = \dfrac{(2-\sqrt{3})\left(u_n - \sqrt{3}\right)}{(2+\sqrt{3})\left(u_n + \sqrt{3}\right)} = \boxed{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} v_n}$.

On pose $q = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2 - \sqrt{3}^2} = \dfrac{4 - 4\sqrt{3} + 3}{1} = \boxed{7 - 4\sqrt{3}}$.

(v_n) est géométrique de raison $q = 7 - 4\sqrt{3}$.

(b) Pour tout n, $v_n = v_0 q^n = \boxed{\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n}$

$v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n = \sqrt{3}} \Leftrightarrow v_n u_n + v_n\sqrt{3} = u_n - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}(v_n + 1) = u_n(1 - v_n) \Leftrightarrow \boxed{u_n = \sqrt{3} \times \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}}$

Par conséquent : $\boxed{u_n = \sqrt{3} \times \dfrac{1 + \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n}{1 - \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n}}$ pour tout n.