TS : correction de la feuille d'exercices sur les limites
(semaine du 13 novembre)

I

Étudier les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2x^2-3x+5\right)$:

On a une forme indéterminée au voisinage de $+\infty$: on lève l'indétermination

$\forall x\neq 0,\ 2x^2-3x+5=x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)=1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^2-3x+5\right)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to=\infty}\left(2x^2-3x+5\right)=+\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+3}{3x^2+5x+9}$.

On a une forme indéterminée au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$: on lève l'indétermination

On factorise numérateur et dénominateur par leurs termes de plus haut degré.

$\forall x\neq 0,\ \dfrac{2x+3}{3x^2+5x+9}=\dfrac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(3+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=\dfrac{2+\frac{3}{x}}{x\left(3+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)=2$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)=3$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)\right]=-\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)\right]=+\infty}$.

Par quotient, on trouve : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+3}{3x^2+5x+9}\right)=0}$.

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+4}{3x+1}$

$\forall x\neq 0,\ \dfrac{x^2+4}{3x+1}=\dfrac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{3+\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to\text{\$}pm\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)=1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{3x+1}=-\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{3x+1}=+\infty}$

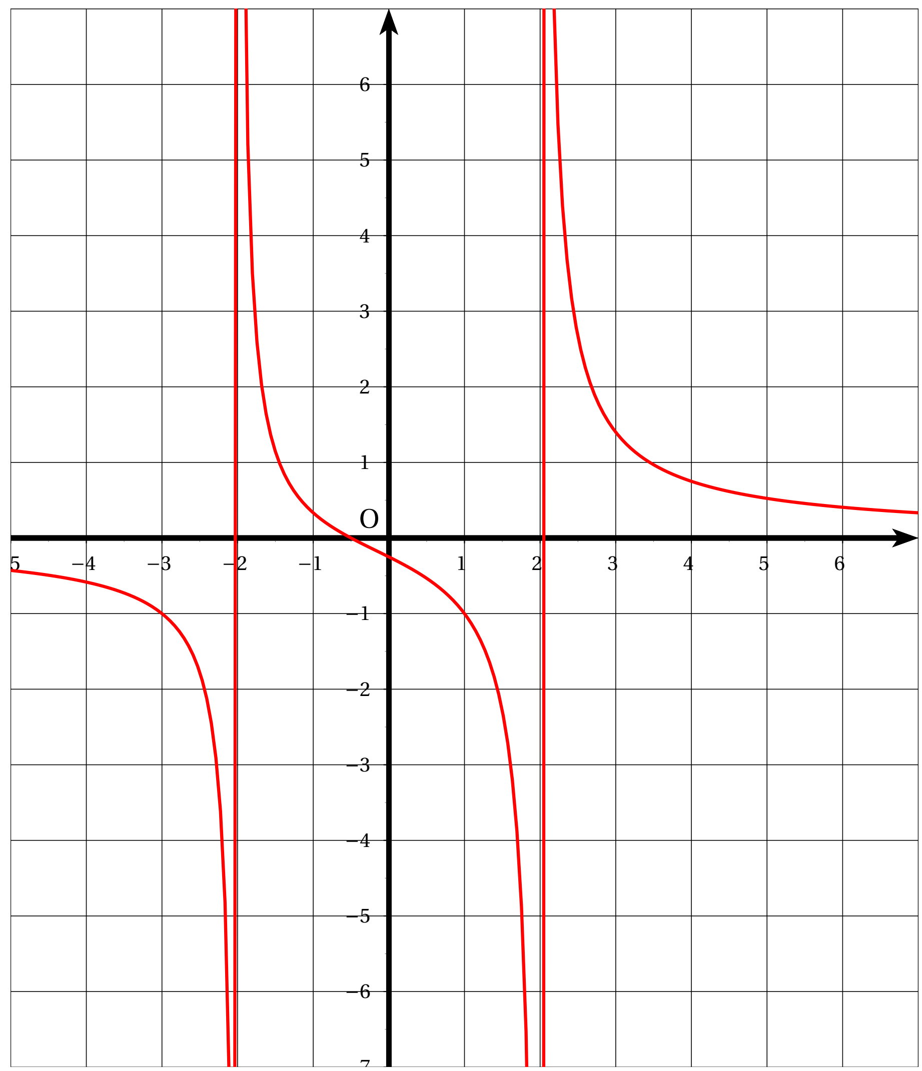
II

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$.

1. x^2-4 s'annule pour $x=-2$ ou $x=2$ donc l'ensemble de définition de f est $\boxed{\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\ ;\ 2\}}$.
2. **Étude des limites** :
   - En $-\infty$ et $+\infty$:
     $\forall x\neq 0,\ f(x)=\dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\dfrac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}$.
     $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)=1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)\right]=\pm\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0}$
   - **Limite en -2** :
     $\lim\limits_{x\to-2}(2x+1)=-3$; $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2-4\right)=0$. On est obligé de distinguer **deux cas** :
     $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(x^2-4\right)=0$ avec $x^2-4>0$ (car x est extérieur à l'intervalle formé par les deux racines) donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}f(x)=-\infty}$.
     De même : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}f(x)=+\infty}$ car cette fois, $x^2-4<0$
   - **Limite en 2** : $\lim\limits_{x\to2}(2x+1)=5$; $\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-4\right)=0$. On est obligé de distinguer deux cas :
     $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(x^2-4\right)=0$ avec $x^2-4<0$ (car x est appartient à l'intervalle formé par les deux racines) donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)=-\infty}$.

De même : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty}$ car cette fois, $x^2-4>0$

On peut vérifier en traçant la courbe (en remarquant que la courbe admet rtrois asymptotes, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=2$)



III

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}=\frac{\left[\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right]\times\left[\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}\right]}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$=\frac{\left(x^2-4x+3\right)-\left[x^2-3x+2\right]}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2}\left[\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\right]}$$

Pour $x<0$, $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ donc, pour $x<0$,

$$f(x)=\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\left[\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\right]}$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{2}}$.

Pour >0, $\sqrt{x^2}=|x|=x$.

Alors : $f(x)=\dfrac{-1+\frac{1}{x}}{\left[\sqrt{\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}\right]}$

On en déduit : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}}$.

car $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=1$ donc $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\lim_{X\to1}\sqrt{X}=\sqrt{1}=1$.

IV

Écrire les fonctions suivantes sous la forme de composée de deux fonctions que l'on déterminera.

a) $f: x\longmapsto \sin(2x+3)$

$f\ :\ x\xrightarrow{g}2x+3\xrightarrow{\sin}\sin(2x+3)$; $f=\sin\circ g$ avec $g(x)=2x+3$

b) $f: x\longmapsto \cos\left(x^2\right)$

$f\ :\ x\xrightarrow{g}x^2\xrightarrow{\cos}\cos\left(x^2\right)$; $f=\cos\circ g$ avec $g(x)=x^2$

c) $f: x\longmapsto (2x+3)^2$

$f\ :\ x\xrightarrow{g}2x+3\xrightarrow{h}(2x+3)^2$; $f=h\circ g$ avec $g(x)=2x+3$ et $h(x)=x^2$

d) $f: x\longmapsto \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2+1}}$

$f\ :\ x\xrightarrow{g}\dfrac{2x+3}{x^2+1}\xrightarrow{h}\sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2+1}}$; $f=h\circ g$ avec $g(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+1}$ et $h(x)=\sqrt{x}$

V

Soient $u: x\longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ et $v: x\longmapsto 2x+3$.

1. $u\circ v(x)=u(v(x))=\dfrac{1}{v^2(x)+1}=\boxed{\dfrac{1}{(2x+3)^2+1}}$.

   $v\circ u(x)=2u(x)+3=2\times\dfrac{1}{x^2+1}+3=\boxed{\dfrac{2}{x^2+1}+3}$.

2. On constate que $\boxed{u\circ v\neq v\circ u}$