Devoir surveillé commun n° 2 - TS - 20/01/18 - durée : 4 heures

Exercice 1 : sur 5 points. Pour les élèves ne suivant pas la spécialité mathématique.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.
Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\mathcal{D}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+\ t \\ y &=& 6+2t \\ z &=& 4-\ t \end{array}\right. ,\quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 8+5t' \\ y &=& 2-2t' \\ z &=& 6+\ t' \end{array}\right. ,\quad t' \in \mathbb{R}.$$

   0, Regardons si elles sont sécantes. Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient aux deux droites si, et seulement si, il existe un couple $(t\,;\,t')$ tel que $\left\{\begin{array}{l} 4+t=8+5t' \\ 6+2t=2-2t' \\ 4-t=6+t' \end{array}\right.$.

   La dernière équation donne $t'=-2-t$.

   On remplace dans les deux autres équations : On obtient le système :

   $\left\{\begin{array}{l} 4+t=8-10-5t \\ 6+2t=2+4+2t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6t=-6 \\ 6=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=-1$. Le système a pour solution $(t\,;\,t')=(-1\,;\,-1)$. Les deux droites se coupent au point de coordonnées $(3\,;\,4\,;\,5)$ donc sont **coplanaires** (**VRAI**)

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les points $A(12\,;\,7\,;\,-13)$ et $B(3\,;\,1\,;\,2)$ ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x+2y-5z=1$.

   0Le point $B(3;1;2)$ appartient au plan $\mathcal{P}$, car $3\times3+2\times1-5\times2=1$.

   Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\-6\\15\end{pmatrix}$ est colinéaire à un vecteur normal du plan : $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AB}=-3\vec{n}$.

   Le point B est bien le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$: **VRAI**

3. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère la droite $\mathcal{D}$ dont on donne une représentation paramétrique, et le plan $\mathcal{P}$ dont on donne une équation cartésienne :

$$\mathcal{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2t \\ y &=& t \\ z &=& -5-4t \end{array}\right. ,\quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} : \quad 3x+2y-z-5=0.$$

   Il est évident que le point de coordonnées $(1\,;\,0\,;\,-5)$ appartient à $\mathcal{D}$ mais pas à $\mathcal{P}$. Donc, si parallélisme il y a, il est strict.

   La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, un vecteur directeur $\vec{d}$ de $\mathcal{D}$ est orthogonal à un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$. Gr,ce aux équations, on a :

$$\vec{d}\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

   Le repère est orthonormé donc : $\vec{d}\perp\vec{n} \Longleftrightarrow x_{\vec{d}}\times x_{\vec{n}}+y_{\vec{d}}\times y_{\vec{n}}+z_{\vec{d}}\times z_{\vec{n}}=0$.

   Ce que l'on vérifie facilement.

   Ainsi $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$: **VRAIE**.

4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le point $A(1\,;\,9\,;\,0)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $\mathcal{P} : 4x-y-z+3=0$.

   La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale, d'après la formule du cours, à :

$$d(A;\mathcal{P})=\frac{|4\times1-9-0+3|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{18}}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'affirmation est **FAUSSE**

5. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P}\,:\,x-y-z-2=0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}'\,:\,x+y+3z=0.$$

Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal au lan $\mathscr{P}'$ est $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires donc les deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants. Leur intersection est une droite.
On remplace alors les expressions de x, y et z en fonction de t' issues de la représentation paramétrique de Δ dans les équations cartésiennes de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{D}'$:
$1-t'-\left(-1-2t'\right)-t'=0$ et $1-t'+\left(-1-2t'\right)+3t'=0$.
Elles conviennent toutes deux donc Δ est l'intersection de ces deux plans : **VRAI**.

6. **Bonus :** Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation :

$$\mathscr{P}\,:\,x-y-z-2=0.$$

Affirmation : La sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathscr{P}$.

La distance entre O et le plan $\mathscr{P}$ est $\dfrac{|0-0-0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\neq 0$ donc la sphère de centre O et de rayon 2 n'est pas tangente au plan $\mathscr{P}$: **FAUX**

Exercice 1 : sur 5 points. Pour les élèves suivant la spécialité mathématiques

1. On cherche tous les entiers x de E tels que $g(x)=x$:
$g(x)=x \iff 4x+3\equiv x \pmod{27} \iff 3x\equiv -3 \pmod{27}$
ce qui veut dire que $3x$ s'écrit $-3+27k$ où $k\in\mathbb{Z}$.
$x\in E \iff 0\leqslant x\leqslant 26 \Leftrightarrow 0\leqslant 3x\leqslant 81$
Or $3x=-3+27k$ donc$0\leqslant -3+27k\leqslant 81 \Leftrightarrow 3\leqslant 27k\leqslant 84 \Leftrightarrow \dfrac{3}{27}\leqslant k\leqslant\dfrac{84}{27}$.
Or k est entier donc $k\in\{1,2,3\}$.
Pour $k=1$, $3x=-3+27=24$ donc $x=8$;
pour $k=2$, $3x=-3+54=51$ donc $x=17$;
pour $k=3$, $3x=-3+81=78$ donc $x=26$.
Les éléments de E invariants par g sont 8, 17 et 26.
Les caractères invariants dans ce codage sont les caractères correspondant à 8,17 et 26 donc ce sont les caractères i, r et $\star$.
2. Soient x et y deux éléments de E tels que $y\equiv 4x+3 \pmod{27}$.
$y\equiv 4x+3 \pmod{27} \iff 7y\equiv 28x+21 \pmod{27}$;
or $21\equiv -6 \pmod{27}$ et $28\equiv 1 \pmod{27}$ donc $28x\equiv x \pmod{27}$
$$\begin{aligned}7y\equiv 28x+21 \pmod{27} &\iff 7y\equiv x-6 \pmod{27} \iff 7y+6\equiv x \pmod{27}\\ &\iff x\equiv 7y+6 \pmod{27}\end{aligned}$$
On suppose qu'il existe deux caractères x et x' de E qui se codent par le même caractère y de E.
On a donc $x\equiv 7y+6 \pmod{27}$ et $x'\equiv 7y+6 \pmod{27}$ ce qui entraîne $x\equiv x' \pmod{27}$ donc on peut écrire $x=x'+27k$ où $k\in\mathbb{Z}$.
Or $0\leqslant x\leqslant 26$ et $0\leqslant x'\leqslant 26$ donc $k=0$ et $x=x'$.
Deux caractères distincts ne sont pas codés par un même caractère, donc deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.
3. Une méthode de décodage suit le même principe que la méthode de codage, en remplaçant la fonction g par la fonction f qui, à chaque élément y de E, associe le reste de la division euclidienne de $7y+6$ par 27.
4. On sait que la lettre s se code en la lettre v, donc la lettre v se décode en s.
La lettre f correspond au nombre $y=5$; $7y+6=7\times 5+6=35+6=41$.
Or $41=27\times 1+14$ donc 14 est le reste de la division de 41 par 27.
Le nombre 14 correspond à la lettre o.
Donc $v\,f\,v$ se décode en $s\,o\,s$.

Exercice 2 : sur 1,5 points. Commun à tous les élèves

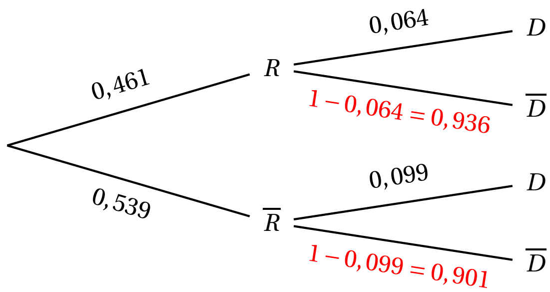
On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de $4,6$ milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que $46,1$ % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et $53,9$ % en zone urbaine.

En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, $9,9$ % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et $6,4$ % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.

On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :

- R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
- D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. On traduit cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité :



2. (a) La probabilité que la personne interrogée soit diabétique est $P(D)$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(D) = P(R\cap D) + P(\overline{R}\cap D) = P(R)\times P_R(D) + P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(D)$
   $= 0,461\times 0,064 + 0,539\times 0,099 = 0{,}029\,304 + 0{,}053\,361 = 0{,}082\,865$
   $\approx 0,083$

   (b) La personne choisie est diabétique. La probabilité qu'elle habite en zone rurale est $P_D(R)$:
   $P_D(R) = \dfrac{P(D\cap R)}{P(D)} = \dfrac{0{,}029\,504}{0{,}082\,865} \approx 0,356$

Exercice 3 : sur 3,5 points. Commun à tous les élèves

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les deux parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

   (a) On a répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues; X sui la loi binomiale $\mathscr{B}(700\ ;\ 0,6)$.

   (b) $p(X\geqslant 400) = 1 - p(X<400) = 1 - p(X\leqslant 399)\ddot{o}approx 0,9427$ donc $\boxed{p(X\geqslant 400)\approx 0,94}$

2. On note Y_n la variable aléatoire comptant le nombre de personnes répondent au sondage.
   Y_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ 0,6)$.
   On doit avoir $p(Y_n\geqslant 400) > 0,9 \Leftrightarrow 1 - p(Y_n\leqslant 399) > 0,9 \Leftrightarrow p(Y_n\leqslant 399) < 0,1$.
   On peut faire un tableau de valeurs à la calculatrice en prenant la fonction $n\mapsto p(Y_n\leqslant 399)$, en faisant varier n par pas de 1.
   On trouve $\boxed{n = 394}$.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.

L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

— soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.

— soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

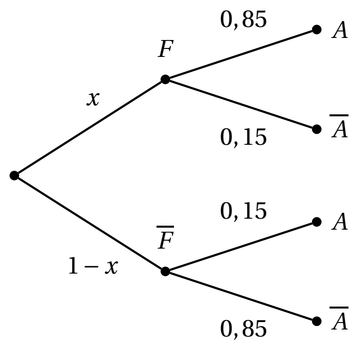
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. on prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

1. $\boxed{P_F(A) = 0,85}$ et $\boxed{P_{\overline{F}}(A) = 0,15}$
2. On pose $x = P(F)$.

(a)



(b) D'après la formule des probabilités totales, $P(A) = P_F(A) \times p(F) + P_{\overline{F}}(A) \times P\left(\overline{F}\right) = 0,85x + 0,15(1-x)$. Or $P(A) = 0,29$.

Donc : $\boxed{0,85x + 0,15(1-x) = 0,29}$

3. On en déduit : $0,7x = 0,14$ d'où $x = \dfrac{0,14}{0,7} = 0,2$: $\boxed{x = 0,2}$.

Conclusion : 20 % des personnes sont réellement fadorables au projet.

Exercice 4 : sur 5 points. Commun à tous les élèves.

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

   (a) Comme 20 % du médicament est éliminé par minute, il en reste 80 % ; prendre 80 % d'un nombre c'est multiplier par 0,8 donc $u_{n+1} = 0,8\,u_n$.

   Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = 10$.

   (b) La suite (u_n) es géométrique, donc pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 0,8^n$.

   (c) La quantité de médicament est inférieure à 1 % de la quantité initiale quand $u_n < \dfrac{1}{100} \times u_0$ c'est-à-dire $u_n < 0,1$.

   On trouve à la calculatrice que $u_{20} \approx 0,115 > 0,1$ *et* $u_{21} \approx 0,092 < 0,1$.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

   Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n. L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute :

Variables :	n est un entier naturel.	
	v est un nombre réel.	
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.	
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15	
		Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
		Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$
		Afficher v.
	Fin de boucle.	

(a) Le tableau ci-dessous donne la quantité restante de médicament minute par minute :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

(b) Les 15 premières minutes, le patient a absorbé 10 mL au début, puis 4 mL les minutes 4, 7, 10 et 13 soit 16 mL; ce qui fait un total de 26 mL.

(c) On programme la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

L'algorithme suivant affiche la quantité de médicament restant dans le sang minute par minute :

Variables :	n est un entier naturel.	
	v est un nombre réel.	
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.	
Traitement :	Pour n allant de 1 à 30	
		Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
		Si $v \leqslant 6$ alors affecter à v la valeur $v + 2$
		Afficher v.
	Fin de boucle.	

3. On programme la machine de façon que :

— à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,

— toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

(a) Comme 20 % du médicament est éliminé chaque minute, il en reste 80 % donc on multiplie par 0,8. De plus, toutes les minutes, on rajoute 1 mL.

On peut donc dire que, pour tout n, $w_{n+1} = 0,8 w_n + 1$.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$, donc $w_n = z_n + 5$.

$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8 w_n + 1 - 5 = 0,8 (z_n + 5) - 4 = 0,8 z_n + 4 - 4 = 0,8 z_n$

$z_0 = w_0 - 5$; or à l'instant 0, on injecte 10 mL donc $w_0 = 10$. On a donc $z_0 = 5$.

La suite (z_n) est donc géométrique de premier terme $z_0 = 5$ et de raison $q = 0,8$.

(c) D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que, pour tout n : $z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n$.

Or $w_n = z_n + 5$ donc, pour tout n, $w_n = 5 \times 0,8^n + 5$.

(d) La suite (z_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite (w_n) est convergente vers 0. D'après les théorèmes sur les limites de suite, on peut en déduire que la suite (w_n) est convergente et a pour limite 5.

Cela veut dire que, si on poursuit ce traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient va se rapprocher de 5 mL.

Exercice 5 : sur 5 points. Commun à tous les élèves

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

a. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x+1)x - 1$.
$g'(x)$ s'annule en -1 et en 1 ; c'est un polynôme du second degré, qui est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur des racines, donc sur $]-\infty\ ;\ -1]$ et sur $[1\ ;\ +\infty[$.
$\forall x \neq 0,\ g(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$.
$\lim\limits_{x \to ś\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (mimites de x^3) On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

b. Sur $]-\infty\ ;\ 1[$, $g(x) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.
Sur $[1\ ;\ =\infty[$, g est continue (fonction olynôme), $g(1) = -5 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ donc $g(x)$ prend des valeurs positives.
D"après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$; Comme g est croissante sur cet intervalle, cette olution est unique. Notpn,s-la α.

c. À la calculatrice, par encadrements successifs, on trouve $2,10 < \alpha < 2,11$.

d. Signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. Soit f la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

a. • Limite en $+\infty$:

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^3\left(2 + \frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{x\left(2 + \frac{3}{x^3}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 + \dfrac{3}{x^3}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$.

• Limite en 1 : $\lim\limits_{x \to 1}\left(2x^3 + 3\right) = 5 > 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}}\left(x^2 - 1\right) = 0$ avec $x^2 - 1 > 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty}$.

b. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x^3 \\ v(x) = x^2 - 1 \end{cases}$.

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 6x^2 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.

On en déduit : $f'(x) = \dfrac{6x^2\left(x^2 - 1\right) - 2x\left(2x^3 + 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \dfrac{2x\left(3x\left(x^2 - 1\left(2x^2 + 3\right)\right)\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \dfrac{2x\left(x^3 - 3x - 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{2xg(x)}{\left(x^2 - 1\right)^2}}$.

Sur $[1\ ;\ +\infty[$, $2x$ et $x^2 - 1$ sonr positifs donc $f'(x)$ est du même signe de $g(x)$.

c. Tabeau de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$:

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

d. Par définition, $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^3=3\alpha+3$.

Alors : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}=\dfrac{2(3\alpha+3)+3}{\alpha^2-1}=\dfrac{6\alpha+9}{\alpha^2-1}=\dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}=\dfrac{3\alpha(2\alpha+3)}{\alpha\left(\alpha^2-1\right)}=\dfrac{3\alpha(2\alpha+3)}{3\alpha+3-\alpha}=\dfrac{3\alpha(2\alpha+3)}{2\alpha+3}=3\alpha$ donc $\boxed{f(\alpha)=3\alpha}$.

e. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x$. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$, $f(x)-2x=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}-2x=\dfrac{2x^3+3-2x\left(x^2-1\right)}{x^2-1}=\dfrac{2x+3}{x^2-1}$.

Étudions le signe de cette expression :

On a déjà étudié le signe de x^2-1

$2x+3$ s'annule pour $x=-\dfrac{3}{2}$ et est positif pour $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
x^2-1		$+$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)-2x=\dfrac{2x+3}{x^2-1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$ pour $x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right] \cup]-1\,;\,1[$ et au-dessus pour $x \in \left[-\dfrac{3}{2}-1\right[\cup]1\,;\,+\infty[$.

$\mathscr{C}$ est donc au-dessus de $\mathscr{D}$ pour $x>1$.

f. $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur 2 ; la tangente à un point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$.

On résout l'équation $f'(x)=2$.

$f'(x)=2 \Leftrightarrow \dfrac{2xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}=2 \Leftrightarrow \dfrac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}=1 \Leftrightarrow xg(x)=\left(x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow x\left(x^3-3x-3\right)=x^4-2x^2+1 \Leftrightarrow -x^2-3x-1=0$

$\Leftrightarrow x^2+3x+1=0$.

$\Delta=5>0$; il y a deux solutions : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\,;\,\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}}$. (aucune dans l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$)

Voilà la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ (non demandées) :