Correction du Devoir surveillé commun n° 1 - TS - 14/10/17

I Pondichéry avril 2017

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

1. On considère les trois algorithmes ci-dessous. Un seul d'entre eux calcule et affiche les termes u_n et v_n, la valeur de l'entier naturel n étant saisie par l'utilisateur. Lequel ? Justifier soigneusement.

Algorithme 1 :

Variables :
n et i : entiers naturels
u et v : réels
Entrée :
Saisir la valeur de n
Traitement :
u prend la valeur 1
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n :
    u prend la valeur $2u - (i-1) + 3$
    v prend la valeur 2^i
Fin Pour
Sortie :
Afficher u
Afficher v

Algorithme 2 :

Variables :
n et i : entiers naturels
u et v : réels
Entrée :
Saisir la valeur de n
Traitement :
u prend la valeur 1
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n :
    u prend la valeur $2u - i + 3$
    v prend la valeur 2^i
Fin Pour
Sortie :
Afficher u
Afficher v

Algorithme 3 :

Variables :
n et i : entiers naturels
u et v : réels
Entrée :
Saisir la valeur de n
Traitement :
u prend la valeur 1
v prend la valeur 1
Pour i allant de 0 à $n-1$:
    u prend la valeur $2u - i + 3$
    v prend la valeur 2^i
Fin Pour
Sortie :
Afficher u
Afficher v

Choisissons $n = 1$ et regardons ce que donnent les trois algorithmes :

Pour le premier algorithme :

n	i	u	v
1			
1		1	1
1	1	$2\times 1 - 0 + 3$	2^1
1	1	5	2

L'algorithme affiche bien ce qui est demandé.

Pour le deuxième algorithme :

n	i	u	v
1			
1		1	1
1	1	$2\times 1 - 1 + 3$	2^1
1	1	4	2

L'algorithme affiche les valeurs $u_1 = 4$ et $v_1 = 2$, ce qui ne convient pas.

Pour le troisième algorithme :

n	i	u	v
1			
1		1	1
1	1	$2\times 1 - 0 + 3$	2^0
1	1	5	1

L'algorithme affiche les valeurs $u_1 = 5$ et $v_1 = 1$, ce qui ne convient pas.

2. Pour que ce premier algorithme affiche tous les termes de ces deux suites jusqu'à l'indice n inclus, il faut mettre l'instruction Afficher u et Afficher v avant la boucle, puis avant **Fin Pour** dans la boucle :

Variables :
n et i : entiers naturels
u et v : réels
Entrée :
Saisir la valeur de n
Traitement :
u prend la valeur 1
v prend la valeur 1
Afficher u
Afficher v
Pour i allant de 1 à n :
    u prend la valeur $2u - (i-1) + 3$
    v prend la valeur 2^i
Afficher u
Afficher v
Fin Pour
Sortie :

3. En entrant les suites dans la calculatrice, on obtient le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	...	10	11	12	13
u_n	1	5	12	25	50	...	3080	6153	12298	24587
v_n	1	2	4	8	16	...	1024	2048	4096	8192
$\frac{u_n}{v_n}$	1	2,5	3	3,125	3,125	...	3,0078	3,0043	3,0024	3,0013

Il semble que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 3}$

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
   $u_n = 3\times 2^n + n - 2$.
   On effectue une démonstration par récurrence :
   initialisation : $u_0 = 1$ et $3\times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0
   hérédité : Soit n un naturel quelconque et supposons que : $u_n = 3\times 2^n + n - 2$ pour un entuer n quelconque.
   D'après la définition : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3 = 2\left(3\times 2^n + n - 2\right) - n + 3 = 3\times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3 = 3\times 2^{n+1} + n - 1$ soit
   $u_{n+1} = 3\times 2^{n+1} + n + 1 - 1 - 1 = \boxed{3\times 2^{n+1} + (n+1) - 2}$.
   La relation est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : la relation est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de la récurrence on a donc démontré que pour tout naturel n,
   $\boxed{u_n = 3\times 2^n + n - 2}$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.
   $u_{18} = 786\,448 < 1\,000\,000$ et $u_{19} = 1\,572\,881 > 1\,000\,000$.
   19 est donc le rang du premier terme supérieur à un million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
   $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n-2}{2^n}$
   $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} = \left(3+\frac{n-1}{2^{n+1}}\right) - \left(3+\frac{n-2}{2^n}\right) = \frac{n-1-2(n-2)}{2^{n+1}} = \boxed{\frac{-n+3}{2^{n+1}}}$ est du signe de $-n+3$
   Donc $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} < 0$ si $n > 3$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est **décroissante à partir du rang 3**.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$.
   Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.
   $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n-2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}$
   D'après l'encadrement donné, on en déduit que pour $n \geqslant 4$, $3 - \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{u_n}{v_n} \leqslant 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^{n-1}}$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3}$

II Amérique du Nord mai 2014

Un volume constant de 2 200 m³ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

1. « Un volume constant de 2 200 m³ d'eau est réparti entre deux bassins A et B. » donc

   Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\boxed{a_n + b_n = 2200}$.
2. Au début du $n+1$-ième jour, la bassin A contient a_n, on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :
   $a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a_n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \boxed{\frac{3}{4}a_n + 330}$

   On a bien, pour tout entier naturel n, $\boxed{a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330}$.
3.

Variables	:	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1\,100$, faire : Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$ Affecter à n la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. (a) Remarque : on peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.
   Pour tout entier naturel n, on a
   $u_{n+1} = a_{n+1} - 1320$par définition de u_n
   $= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320$ d'après la question 2.

$= \dfrac{3}{4}a_n - 990 = \dfrac{3}{4}(a_n - 1320) = \dfrac{3}{4}u_n$.
On reconnait la définition d'une suite **géométrique** de raison $\boxed{\dfrac{3}{4}}$.
Son premier terme est $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = \boxed{\mathbf{-520}}$

(b) On a donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n = -520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
Mais, par définition de u_n, on a $u_n = a_n - 1320 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1320$ donc $\boxed{a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
Si ce jour arrive, on aura $a_n = b_n = \dfrac{2200}{2} = 1100$.
Il faut donc résoudre l'équation $1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 1100$ d'inconnue n.
$1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 1100 \Leftrightarrow 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 220 \Leftrightarrow \boxed{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{11}{26}}$.
À la calculatrice, on trouve $\boxed{n \approx 3}$.
On vérifie : $a_3 = 1100{,}625$ et $b_3 = 1099{,}375$ donc $a_3 - b_3 \approx 1{,}25 > 1$.
Les deux bassins n'auront donc **jamais** le même volume d'eau, à un mètre cube près.

III QCM : France juin 2005 (extrait)

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
   Cette proposition est fausse :
   Prenons par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. (u_n) est convergente, de limite nulle.
   On obtient alors $v_n = -2(n+1)$, terme général d'une suite qui tend vers $-\infty$, donc non convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
   Démontrons que cette proposition est vraie :
   Par hypothèse, (u_n) est minorée par 2.
   Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{2}{u_n} \geq -1 \Rightarrow \boxed{v_n \geq -1}$.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
   Cette proposition est fausse :
   Reprenons comme exemple $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ qui est bien le terme général d'une suite décroissante. On obtient $v_n = -2(n+1)$, donc une suite (v_n) **décroissante**.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.
   Cette proposition est fausse.
   Prenons $u_n = (-1)^n$. Alors, $v_n = -\dfrac{2}{(-1)^n} = \pm 2$. Cette suite vaut alternativement 2 ou -2, donc ne converge pas.