Correction du devoir surveillé en TS1-TS2 et TS3 (31 mars 2018)

I

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$$

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. $u_0 = |z_0| = \left|\sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = 2$; $\boxed{u_0 = 2}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+\mathrm{i})z_n| = |1+\mathrm{i}| \times |z_n| = \sqrt{2}|z_n| = \boxed{\sqrt{2}u_n}$.
   (u_n) est donc une suite **géométrique**, de premier terme 2 et de raison $q = \sqrt{2}$.
3. D'après le cours, pour tout entier naturel n, on a $\boxed{u_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n}$
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2} > 1$ et de premier terme strictement positif, elle **diverge** donc vers $+\infty$.
5. **Algorithme**

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	Tant que $u \leqslant p$ Faire Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$ Fin du Tant Que
Sortie	:	Afficher n

Partie B

1. $z_1 = (1+\mathrm{i}) \times (\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)$; $\boxed{z_1 = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)}$.
2. **Pour $\mathbf{z_0}$** :
   $|z_0| = 2$.
   Recherche d'un argument de z_0 : Notons θ_0 un argument de z_0.
   $$\begin{cases} \cos\theta_0 = \dfrac{\mathrm{Re}\,(z_0)}{|z_0|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_0 = \dfrac{\mathrm{Im}\,(z_0)}{|z_0|} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$
   On en déduit que $\boxed{\theta_0 = -\dfrac{\pi}{6}}$.

   D'où : $z_0 = \boxed{2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   Pour $1+\mathrm{i}$:
   $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.
   Il est clair, géométriquement, que $\arg(1+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}$.

   On en déduit que $1+\mathrm{i} = \boxed{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Alors :

- $|z_1| = |(1+\mathrm{i})z_0| = |1+\mathrm{i}| \times |z_0| = 2\sqrt{2}2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$
- $\arg(z_1) = \arg((1+\mathrm{i})z_0) = \arg(1+\mathrm{i}) + \arg(z_0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

  Par conséquent : $\boxed{z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$

3. Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1+\sqrt{3}+\mathrm{i}(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

D'où, par identification des parties réelles :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

II

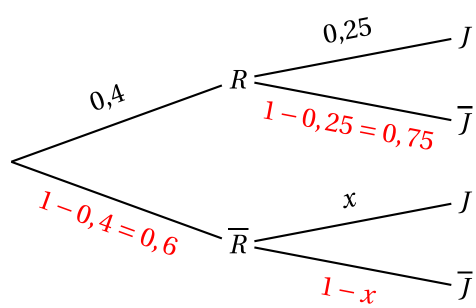
Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $\boxed{P(J) = 0,2}$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(J) = P(R\cap J) + P\left(\overline{R}\cap J\right) = P(R)\times P_R(J) + P\left(\overline{R}\right)\times P_{\overline{R}}(J) = 0,4\times 0,25 + 0,6\times x = \boxed{0,1+0,6x}$
   $\left.\begin{array}{rcl} P(J) & = & 0,2 \\ P(J) & = & 0,1+0,6x \end{array}\right\} \Longrightarrow 0,2 = 0,1+0,6x \iff \boxed{x = \frac{1}{6}}$
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   C'est une bouteille de jus d'orange avec la probabilité $P_J(R) = \frac{P(R\cap J)}{P(J)} = \frac{0,1}{0,2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

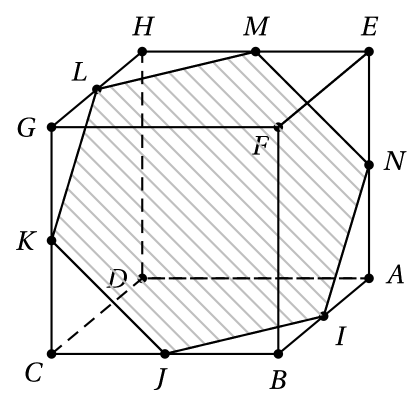
1. On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à $p = 0,2$ ou elle ne l'est pas avec la probabilité $1 - p = 0,8$.

   On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la **loi binomiale de paramètres n = 500 et p = 0,2**.
2. On cherche $P(X \geqslant 75)$ qui est égal à $1 - P(X \leqslant 74)$.
   À la calculatrice on trouve $P(X \leqslant 74) \approx 0,0016$ ce qui donne $\boxed{0,998}$ pour la probabilité cherchée.
3. L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p est $E(X) = np$, donc, ici, $E(X) = 500 \times 0,2 = 100$; $\boxed{E(X) = 100}$.
   Cela signifie que sur un grand nombre de lots de 500 bouteilles, en moyenne 100 d'entre elles sont « pur jus »

III

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.



Dans ce repère, on a :
$D(0 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 0 ; 0)$, $A(0 ; 1 ; 0)$,
$H(0 ; 0 ; 1)$ et $E(0 ; 1 ; 1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. (a) On a $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0.$$

On en déduit que

$$(DF) \perp (BG) \quad \text{et} \quad (DF) \perp (BE).$$

La droite (DF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BGE), elle est donc orthogonale à ce plan, et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est donc un vecteur **normal** au plan (BGE).

(b) Les plans $\mathscr{P}$ et (BGE) sont parallèles, le vecteur $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est donc également un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Ce dernier a donc une équation cartésienne du type :

$$x + y + z + d = 0$$

où d est un réel à déterminer. Le plan $\mathscr{P}$ passe par le point $I\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$, donc

$$\frac{1}{2} + 1 + 0 + d = 0 \iff d = -\frac{3}{2}.$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc $\boxed{x + y + z - \frac{3}{2} = 0}$.

2. Les plans $\mathscr{P}$ et (BGE) sont parallèles. Leurs intersections respectives avec le plan (ABE) sont donc deux droites parallèles.
L'une de ces droites est (IN), l'autre est (BE). Ainsi dans le triangle ABE les droites (IN) et (BE) sont parallèles et I est le milieu de $[AB]$, donc d'après le théorème « de la droite des milieux » le point N est le milieu de $[AE]$.

3. (a) La droite (HB) passe par le point $H(0\,;\,0\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & 1-t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})\ .}$$

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (HG) est le plan $\mathscr{P}$ sont donc sécants en un unique point T. Comme $T \in (HG)$, il existe un réel t tel que $T(t\,;\,t\,;\,1-t)$. Alors :

$$T \in \mathscr{P} \iff t + t + 1 - t - \frac{3}{2} = 0 \iff t = \frac{1}{2},$$

les coordonnées de T sont donc $\boxed{T\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)}$.

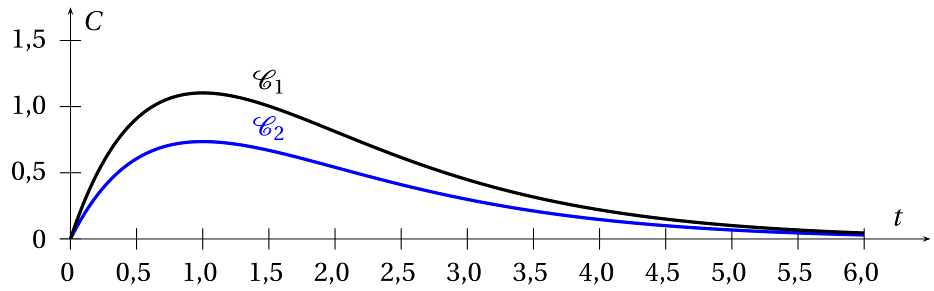
4. Le tétraèdre $FBGE$
— a pour base le triangle FBG qui est rectangle isocèle en F et a pour aire $\mathscr{B} = \frac{1}{2} \times FE \times FB = \frac{1}{2}$;
— pour hauteur $h = FE = 1$.
Le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre $FBGE$ est donc

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

IV

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.
Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La vitesse est visiblement maximale pour $\boxed{t = 0}$ car c'est la tangente aux courbes en $O(0\,;\,0)$ qui semble avoir le coefficient directeur le plus élevé parmi toutes les tangentes.
2. La courbe $\mathscr{C}_1$ montre que le taux d'alcoolémie de P_1 admet un maximum plus élevé que pour P_2.
   On en déduit que la personne la moins corpulente est $\boxed{P_1}$
3. (a) Première méthode (longue mais utilisable dans la partie B) :
   f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.
   $f = uv \Longrightarrow f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(t) = At \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = A \\ v'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$
   $\forall t \in [0\,;\,+\infty[\,,\ f'(t) = A(1-t)\mathrm{e}^{-t}$ et $\boxed{f'(0) = A}$

   Deuxième méthode (peut-être un peu plus astucieuse ?) :
   $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} A\mathrm{e}^{-h} = A$ (limite finie)
   On en déduit que f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = A}$.

   (b) L'affirmation est FAUSSE
   si $A_1 > A_2$ alors $A_1 t\mathrm{e}^{-t} > A_2 t\mathrm{e}^{-t}$ car $t\mathrm{e}^{-t} > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$
   On en déduit que la courbe associée à A_1 est **au dessus** de celle associée à A_2 donc la personne associée à A_1 est de plus faible corpulence que la personne associée à A_2

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. On a vu dans la partie précédente que $\forall t \in [0\,;\,+\infty[\,,\ f'(t) = A(1-t)\mathrm{e}^{-t}$ or $A\mathrm{e}^{-t} > 0$
   donc $f'(t)$ est du signe de $1-t$, on peut donc déterminer les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	↗	$\frac{2}{\mathrm{e}}$	↘	

2. La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1h après l'absorption.
   Elle est alors d'environ 0,74 $g.l^{-1}$

3. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(2 \times \dfrac{t}{\mathrm{e}^t}\right) = \lim\limits_{t \to +\infty} 2 \times \dfrac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\right)} = \boxed{0}$ par quotient

On en déduit que l'alcool finit par s'éliminer **totalement**.

4. (a) f est continue et strictement croissante sur $[0\ ,\ 1]$ à valeurs dans $\left[0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$

or $0,2 \in \left[0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(t) = 0,2$ admet une unique solution t_1 sur $[0\ ,\ 1]$

de même, f est continue et strictement décroissante sur $[1\ ,\ +\infty[$ à valeurs dans $\left]0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$

or $0,2 \in \left]0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(t) = 0,2$ admet une unique solution t_2 sur $[1\ ,\ +\infty[$

(b) Par balayage, on obtient $\boxed{t_1 \approx 0,112}$ et $\boxed{t_2 \approx 3,577}$

donc **Paul doit attendre au minimum 3 heures et 35 minutes** avant de reprendre le volant.

5. (a) On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ donc par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > T\ ,\ f(t) \in]-\epsilon\ ;\ \epsilon[$

ici on pose $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$

Donc il existe un instant T à partir duquel l'alcool n'est plus détectable dans le sang

(b) **Algorithme complété** :

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

La valeur affichée par l'algorithme est le temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.

Si on poursuit l'algorithme jusqu'à son terme, on obtient $8,25$ à l'affichage donc il faut **8 h et 15 minutes** pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang