Devoir sur feuille n° 2

I

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) Soit l'équation $3x^2-5x-1=0$

Le discriminant est $\Delta=37>0$. L'équation a deux solutions :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{5-\sqrt{37}}{6}\ ;\ \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right\}}$$

b) Soit l'équation $x^4+4x^2-21=0$.

On pose $X=x^2$ donc

$$x^4+4x^2-21=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=x^2 \\ X^2+4X-21=0\end{array}\right.$$

Le discriminant de cette équation d'inconnue X est $\Delta=100>0$.

Elle a deux solutions réelles : $X_1=\dfrac{-4-10}{2}=-7$ et $X_2=\dfrac{-4+10}{2}=3$.

Or $X=x^2$, donc on résout les équations $x^2=X_1$ et $x^2=X_2$.

$x^2=X_1=-7$ n'as pas de solution; $x^2=X_2=3$ a deux solutions, $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\right\}}.$$

II

1. On trouve à la calculatrice qu'une racine du polynôme $x^3-150x+500$ est 10. (donc $n=10$)
2. On cherche a, b et c tels que
$$x^3-150x+500=(x-10)\left(ax^2+bx+c\right).$$
$(x-10)\left(ax^2+bx+c\right)=ax^3+(b-10a)x^2+(c-10b)x-10c$.
Par identification des coefficients, on obtient le système :
$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b-10a=0 \\ c-10b=-150 \\ -10c=500\end{array}\right. .$$
On en déduit $a=1$, $b=10$, $c=-50$ et $c=-50$.
On en déduit : $x^3-150x+500=(x-10)\left(x^2+10x-50\right)$
3. $x^3-150x+500=0 \Leftrightarrow (x-10)\left(x^2+10x-50\right)=0$.
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   - $x-10=0 \Leftrightarrow x=10$
   - $x^2+10x-50=0$; $\Delta=300>0$; il y a deux solutions : $x_2=\dfrac{-10-\sqrt{300}}{2}=-5-5\sqrt{3}=-5\left(1+\sqrt{3}\right)$ et $x_3=-5\left(1-\sqrt{3}\right)$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{10\ ;\ -5\left(1+\sqrt{3}\right)-5\left(1-\sqrt{3}\right)\right\}}.$$

III

Résoudre soigneusement l'inéquation $\dfrac{2x+5}{x-5}\leqslant\dfrac{3x-1}{3x+1}$

- L'ensemble de définition est $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\ ;\ 5\right\}$
- Pour $x\in\mathscr{D}$, $\dfrac{2x+5}{x-5}\leqslant\dfrac{3x-1}{3x+1} \Leftrightarrow \dfrac{2x+5}{x-5}-\dfrac{3x-1}{3x+1}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+5)(3x+1)-(3x-1)(x-5)}{(x-5)(3x+1)}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\left(6x^2+2x+15x+5\right)-\left(3x^2-15x-x+5\right)}{(x-5)(3x+1)}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{6x^2+17x+5-3x^2+16x-5}{(x-5)(3x+1)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+33x}{(x-5)(3x+1)}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{3x(x+11)}{(x-5)(3x+1)}\leqslant 0.$
On étudie le signe de chaque facteur et l'on renseigne un tableau de signes.
$3x=0 \Leftrightarrow x=0$
$x+11=0 \Leftrightarrow x=-11$
On sait qu'un polynôme du second degré qui a deux racines est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
Tableau de signes :

x	$-\infty$		-11		$-\frac{1}{3}$		0		5		$+\infty$
$3x(x+11)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$(x-5)(3x+1)$		$+$	|	$+$	‖	$-$	|	$-$	‖	$+$	
$\dfrac{3x(x+11)}{(x-5)(3x+1)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left[-11\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right[\cup[0\ ;\ 5[}$

IV

On donne la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$$\left\{\begin{array}{l} t_0=0 \\ t_{n+1}=t_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\end{array}\right. .$$

Soit $P(n)$: $\forall n\in\mathbb{N},\ t_n=\dfrac{n}{n+1}$.

Initialisation : $t_0=0$ et $\dfrac{0}{0+1}=0$. $P(0)$ est vraie

Hérédité : On suppose que $t_n=\dfrac{n}{n+1}$; montrons alors que $t_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$t_{n+1}=t_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
$=\dfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\boxed{\dfrac{n+1}{n+2}}$

La proposition $P(n)$ est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

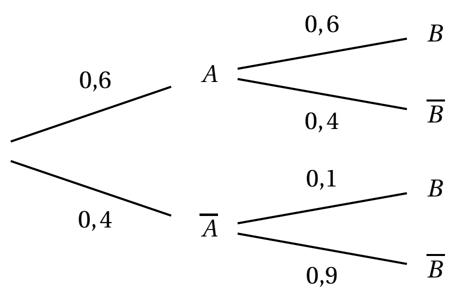
V

Partie A

1. $p\left(\overline{A}\right) = 1 - x$.
2. On a donc $x(1-x) = 0,24 \iff x - x^2 = 0,24$
$\iff x^2 - x + 0,24 = 0$.
$\Delta = 1 - 4 \times 0,24 = 1 - 0,96 = 0,04 = 0,2^2$. Il y donc deux solutions :
$x_1 = \dfrac{1+0,2}{2} = 0,6$ et $x_2 = \dfrac{1-0,2}{2} = 0,4$.

Partie B

1. $p(A) = 0,6$: $p\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{3}{5} = 0,6$.



2. (a) « le lecteur a choisi l'abonnement à la "Revue Spéciale d'Économie" et au "Guide des Placements en Bourse" ».
$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,6 \times 0,6 = \boxed{0,36}$.
   (b) « le lecteur n'a pas choisi l'abonnement à la "Revue Spéciale d'Économie" et n'a pas choisi l'abonnement au "Guide des Placements en Bourse" ».
$p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,4 \times 0,9 = \boxed{0,36}$.
3. D'après la loi des probabilités totales :
$p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right)$
Or $p\left(\overline{A} \cap B\right) = p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.
Donc $p(B) = 0,36 + 0,04 = \boxed{0,4}$.
$p_B(A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(B)} = \dfrac{0,36}{0,40} = \dfrac{36}{40} = \dfrac{9}{10} = \boxed{0,9}$.
4. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = p(B) = 0,4$.
La probabilité qu'aucun des trois n'ait choisi l'abonnement au « Guide des Placements en Bourse »est égale à $(1-0,4)^3 = 0,6^3 = 0,216$, donc la probabilité pour qu'au moins l'un d'eux ait choisi l'abonnement au « Guide des Placements en Bourse »est égale à :
$1 - 0,216 = \boxed{0,784}$.

VI

1. f est une fraction rationnelle, donc dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition, et :
$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$
Donc f est croissante sur $[0; 2]$, et comme f est continue l'image de [1 ;2] par f est
$[f(1)\ ;\ f(2)] = \left[\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right] \subset [1\ ;\ 2]$, ainsi :
si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $\boxed{f(x) \in [1\ ;\ 2]}$.
2. (a) Voir le graphique.
   (b) Soit P_n la proposition de récurrence : $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
Initialisation : comme $v_0 = 2$ alors P_0 est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, alors $1 \leqslant v_n \leqslant 2$, donc $1 \leqslant f(v_n) \leqslant 2$, d'après la relation démontrée à la question 1.
Ainsi si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie, mais P_0 est vraie, donc pour tout n, P_n est vraie.
Ainsi pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
Soit Q_n la proposition de récurrence : $v_{n+1} \leqslant v_n$.
Or $v_1 = f(v_0) = f(2) = \dfrac{5}{3}$ donc $v_1 \leqslant v_0$. Donc Q_0 est vraie.
Supposons Q_n vraie, alors $v_{n+1} \leqslant v_n$, mais v_n et v_{n+1} sont deux nombres de $[0; 2]$, donc comme f est croissante sur $[0; 2]$, alors :
$$f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \iff v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$$
Donc Q_{n+1} est vraie.
Ainsi, si Q_n est vraie alors Q_{n+1} est vraie, mais Q_0 est vraie, donc pour tout n, Q_n est vraie.
Ainsi pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{2v_n+1}{v_n+1} - \dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$
$= \dfrac{(2u_n+1)(v_n+1) - (2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$
$= \dfrac{2u_nv_n + u_n + 2v_n + 1 - 2u_nv_n - 2u_n - v_n - 1}{(u_n+1)(v_n+1)}$
$= \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
Soit R_n la relation de récurrence : $v_n - u_n \geqslant 0$
Or $v_0 - u_0 = 2 - = 1$, donc R_0 est vraie.
Supposons R_n vraie, alors $v_n - u_n \geqslant 0$, mais :
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\overbrace{v_n - u_n}^{>0}}{\left(\underbrace{v_n+1}_{>0}\right)\left(\underbrace{u_n+1}_{>0}\right)}.$$
Donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$.
Ainsi, si R_n est vraie alors R_{n+1} est vraie, mais R_0 est vraie, donc pour tout n, R_n est vraie.
Ainsi pour tout entier naturel $v_n - u_n \geqslant 0$.
Comme $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors $2 \leqslant u_n + 1 \leqslant 3$ et $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{u_n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
De même, $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{v_n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Or
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{4}.$$

(d) En procédant par récurrence, on démontre que pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \underbrace{(v_0 - u_0)}_{=1}$$

(e) Comme la suite (u_n) est croissante $(u_n \leqslant u_{n+1})$ et majorée par 2, alors **u est convergente**.

Comme la suite (v_n) est décroissante $(v_n \geqslant v_{n+1})$ et minorée par 1, alors **v est convergente**.

Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$

et comme pour tout entier naturel n,

$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$,

alors d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \quad \underbrace{\iff}_{u\ et\ v \text{ convergent}} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Donc les suites (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel α.

Comme f est continue, $u_{n+1} = f(u_n)$ et u converge vers α, alors :

$$\begin{aligned} \alpha = f(\alpha) \quad &\iff \quad \alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} \\ &\iff \quad \alpha(\alpha+1) = 2\alpha+1 \\ &\iff \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ &\iff \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Or comme $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. (nombre d'or)