CORRECTION du TD n° 0

I

Résoudre l'inéquation $3x^2+x-4 \geqslant 0$. $\Delta = b^2-4ac$ avec $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=-4 \end{cases}$ donc $\Delta = 49 > 0$.

Le trinôme du second degré a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-7}{6} = -\dfrac{4}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+7}{6} = 1$.

On sait que, si $\Delta > 0$, ax^2+bx+c est du signe de a (coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et du signe de $-a$ entre les racines.

On en déduit : $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{4}{3}\right] \cup [1\,;\,+\infty[}$

II

Résoudre l'inéquation $2x^4+7x^2-15=0$.

C'est une équation bicarrée ; on effectue un changement de variable en posant $X = x^2$.

L'équation équivaut à $\begin{cases} 2x^4+7x^2-15=0 \\ X = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2+7X-15 \\ X=x^2 \end{cases}$.

On résout l'équation du second degré, d'inconnue X : $2X^2+7X-15=0$.

$\Delta = 169 = 13^2 > 0$; l'équation a deux racines : $X_1 = -5$ et $X_2 = \dfrac{3}{2}$.

Or $X = x^2$.

Les solutions de l'équation initiale sont les solutions des équations $x^2 = X_1 = -5$ et $x^2 = X_2 = \dfrac{3}{2}$.

- $-5 < 0$ donc $x^2 = -5$ n'a pas de solution réelle (c'est-à-dire dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$).
- $x^2 = \dfrac{3}{2}$ a deux solutions opposées : $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,;\,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right\}}$

III

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0.

Le cinquième terme est u_4, car il y a cinq entiers entre 0 et 4 compris.

IV

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2+3n+1$.

- $u_1 = 1^2+3\times 1+1 = 5$: $\boxed{u_1 = 5}$
- $u_2 = 2^2+3\times 2+1 = 11$: $\boxed{u_2 = 11}$
- $u_n+1 = n^2+3n+1+1 = \boxed{n^2+3n+2}$.
- $u_{n+1} = (n+1)^2+3(n+1)+1 = \boxed{n^2+5n+5}$
  (il faut bien distinguer les écritures de u_n+1 et de u_{n+1} ! les indices s'écrivent un interligne en dessous de la ligne principale)

V

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n+n+3 \end{cases}$.

On a : $u_{n+1} = u_n + n + 3$.

- $u_1 = u_{0+1} = u_0+0+3 = -5+0+3 = \boxed{-2}$
- $u_2 = u_{1+1} = u_1+1+3 = -2+1+3 = \boxed{2}$

VI

On pourra utiliser la calculatrice pour certaines questions.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant !)

La suite v est définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + v_n^2$.

a) La suite v est croissante.
Vrai puisque, pour tout n, $v_{n+1} - v_n = v_n^2 \geqslant 0$.

b) $v_n \geqslant 1$ à partir du rang 12.
Vrai, car $u_{12} \approx 1,96$ et la suite est croissante.

c) Il existe un rang n tel que $v_n \geqslant 10^{10}$.
Vrai : $u_{17} \approx 6,98 \times 10^{12}$

d) Pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 10^{50}$.
Faux : $u_{19} \approx 2,37 \times 10^{51}$

e) La suite v a pour limite 10^{50}. **Faux** : pour $n \geqslant 19$, $u_n > 10^{50}$ donc la limite éventuelle ne peut être 10^{50} ; cette suite a d'ailleurs une limite infinie.