TS3 : contrôle (récurrence, suites)
(2 heures)

I — 2 points

Quelle est la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$?

II — 2,5 points

Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

III — 2,5 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3)$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1).$$

IV — 4 points

1. Un capital initial c_0 de 600 euros est placé sur un compte rapportant 5 % d'intérêts annuels. On note c_n le capital acquis au bout de n années (n entier naturel).
   (a) Montrer que le capital c_{n+1} est égal à $1,05c_n$.
   (b) En déduire l'expression de c_n en fonction de n.
   (c) Trouver (à la calculatrice) le nombre minimal d'années nécessaires pour que le capital ainsi placé ait au moins triplé.
2. Un autre épargnant place également un capital initial de 600 euros au taux annuel de 5 % d'intérêts, et fait un versement supplémentaire de 150 euros à la fin de chaque année. On appelle d_0 le capital initial et d_n le capital ainsi acquis à la fin de la n-ième année.
   (a) Calculer d_1, d_2, d_3.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = 1,05d_n + 150$.
   (c) Soit (v_n) la suite définie par :
   $$v_n = d_n + 3\,000.$$
   Calculer v_0 et v_1.
   (d) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$.
   (e) Écrire v_n en fonction de v_0 et de n.
   (f) En déduire d_n en fonction de n.
   (g) En utilisant la calculatrice, trouver à partir de combien d'années le capital d_n aura-t-il au moins triplé ?

V — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
3. Démontrer que la suite $\left(n^2\right)$ n'est pas majorée.
4. En déduire que (u_n) n'est pas majorée puis déterminer la limite de la suite (u_n). (on précisera le théorème utilisé !)
5. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4.
6. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
7. Démontrer par récurrence que cette expression est valable pour tout entier naturel n .

VI — 4 points

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout $n \geqslant 1$: $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1$.
Ce tableau donne les dix premiers termes de la suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
2. Conjecturer la nature de la suite ; en déduire une conjecture sur l'expression de w_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture.
4. En déduire la valeur de w_{2000}.