Correction du bac blanc TS février 2017

Exercice I (sur 5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{5x+6}{x^3-1}$.

Partie 1 : recherche des asymptotes

1. • Limite en $-\infty$: Pour tout $x\neq 0$,
$f(x)=\dfrac{x\left(5+\frac{6}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{5+\frac{6}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5+\dfrac{6}{x}\right)=5$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)=1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$.

   • Limite en $+\infty$: on obtient de même $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

   • Limite en 1 : $\lim\limits_{x\to-1}(5x+6)=1$: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}=0$ en étant négatif par croissance ce la fonction $x\mapsto x^3$.
   On en déduit $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty}$.
   De même : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}=+\infty}$.

2. • Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, la droite d'équation $y=0$ est **asymptote** à la courbe $\mathscr{C}$.

   • Puisque $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\pm\infty$, la droite d'équation $x=-1$ est **asymptote** à la courbe $\mathscr{C}$.

Partie 2 : étude des variations de la fonction f

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme quotient de fonctions dérivables.
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)=\dfrac{5\left(x^3-1\right)-3x^2(5x+6)}{\left(x^3-1\right)^2}$
$=\dfrac{5x^3-5-15x^3-18x^2}{\left(x^3-1\right)^2}=\boxed{\dfrac{-10x^3-18x^2-5}{\left(x^3-1\right)^2}}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $g(x)=-10x^3-18x^2-5$.

   (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\boxed{g'(x)=-30x^2-36x=-6x(5x+6)}$ qui s'annule en $-\dfrac{6}{5}$ et en 0.
   C'est un polynôme du second degré, négatif (du signe du coefficient de x^2) en dehors de l'intervalle formé par les racines.
   g est donc décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{6}{5}\right]$, croissante sur $\left[-\dfrac{6}{5}\,;\,0\right]$, décroissante sur $[0\,;\,1[$ pus de nouveau décroissante sur $]1\,;\,=\infty[$.
   $g(x)=x^3\left(-10-\dfrac{18}{x}-\dfrac{5}{x^3}\right)$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.
   On en déduit le **tableau de variation** de g :

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -13{,}64$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

   (b) Sur $\left[-\dfrac{6}{5}\,;\,+\infty\right[$, $g(x)<0$ d'après les variations de g.
   Sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{-}\right]$:
   • g est continue comme polynôme
   • $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ donc $g(x)$ prend des valeurs positives.
   • $g\left(-\dfrac{5}{6}\right)<0$
   D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x)=0$ admet une solution dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{6}{5}\right]$; celle-ci est unique car g est monotone sur cet ntervalle. On note α cette solution.

   (c) À la calculatrice, on trouve $\boxed{-1{,}94<\alpha-1{,}93}$ à 0,01 près.

   (d) **Tableau de signe de g.**
   On en déduit :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	

3. **Tableau de variation de f** :
Comme $\left(x^3-1\right)^2>0$ sur l'ensemble de définition, $f'(x)$ est du signe de g
On en déduit les variations de g :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Partie 3 :étude d'une tangente

1. La tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation réduite :
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$; or $f'(0)=-5$ et $f(0)=-6$ donc T a pour équation $\boxed{y=-5x-6}$.

2. **Position relative de T et de $\mathscr{C}$** :

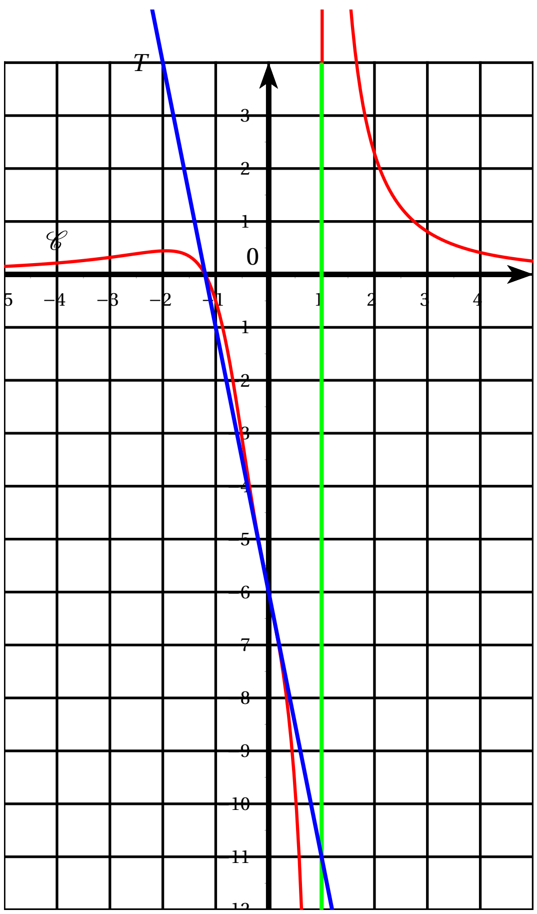
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) - (-5x-6)$
$= \dfrac{5x+6}{x^3-1} + 5x + 6 = (5x+6)\left[\dfrac{1}{x^3-1}+1\right]$
$= \boxed{(5x+6) \times \dfrac{x^3}{x^3-1}}$.

On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		0		1		$+\infty$
$5x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	||	$+$	
x^3		$-$	|	$-$	0	$+$	||	$+$	
x^3-1		$-$	|	$-$	|	$-$	||	$+$	
$f(x)-(-5x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}$ est en dessous de T pour $x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{6}{5}\right] \cup [0\,;\,1[$ et est au-dessus pour $x \in \left[-\dfrac{6}{5}\,;\,0\right] \cup]1\,;\,+\infty[$

Voici la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T, même si elles n'étaient pas demandées.



Exercice II (sur 5 points)

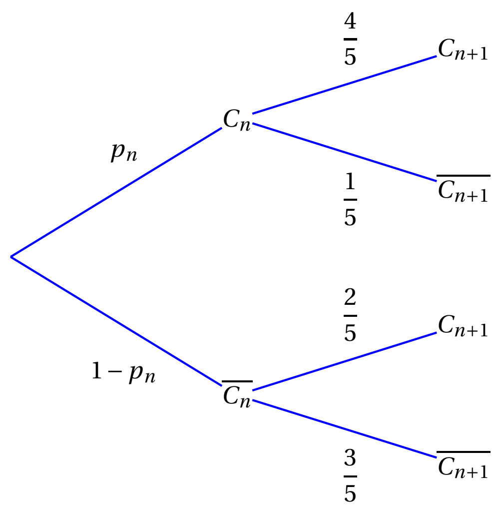
Partie A :

On considère une épreuve de tir à l'arc constitué de plusieurs tirs successifs sur une cible :

- si le tireur touche la cible lors d'un tir, la probabilité qu'il touche la cible au tir suivant est $\dfrac{4}{5}$.
- si le tireur manque la cible lors d'un tir, la probabilité pour qu'il la manque aussi au tir suivant est égale à $\dfrac{3}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par C_n l'évènement « le tireur touche la cible lors du n-ième tir » et on note p_n la probabilité de l'évènement C_n.
On considère que le tireur atteint toujours la cible lors de son premier lancer et donc $p_1 = 1$.

1. Arbre pondéré complété :



2. Pour tout n $p_{n+1} = p(C_{n+1}) = p\left((C_{n+1}\cap C_n) \cup \left(C_{n+1} \cap \overline{C_n}\right)\right)$
$= p(C_{n+1}\cap C_n) + \left(\overline{C_{n+1}} \cap C_n\right) = \dfrac{4}{5}p_n + \dfrac{2}{5}(1-p_n) = \boxed{\dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{2}{5}}$.

3. On pose $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}p_n - \dfrac{4}{15} = \dfrac{2}{5}\left(p_n - \dfrac{2}{3}\right) = \boxed{\dfrac{2}{5}u_n}$.
   On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.
   On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 q^{n-1} = \boxed{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}}$.
   (b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $p_n = u_n + \dfrac{2}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}}$.
   (c) $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, donc par produit et somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{2}{3}}$

Partie B

1. (a) On a répétition d'épreuves aléatoires identiques, indépendantes, à deux issues.

   X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(10\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ car la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{1}{4}$.

   $\forall k \leqslant 10,\ p(X=k)=\begin{pmatrix}10\\k\end{pmatrix}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{10-k}$.

   (b) $p(X \geqslant 1) = 1-p(X=0) = 1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} \approx 0{,}94$ à 10^{-2} près.

   (c) L'espérance de X est $E(X)=np=10\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{2}$; $\boxed{E(X)=\dfrac{5}{2}}$

2. (a) Le joueur joue 50 euros ; il gagne 10 euros par boule rouge tirée ; comme il tire $\dfrac{5}{2}$ boules rouges en moyenne, son gain algébrique est, en moyenne, $10\times\dfrac{5}{2}-50=-\dfrac{50}{2}<0$. Le jeu lui est **défavorable**.

   (b) Puisque le joueur joue 50 euros, pour que son bénéfice soit supérieur à 20 euros, il faut qu'il tire plus de 7 boules rouges.

   $p(X>7)=1-p(X\leqslant 7)\boxed{\approx 0{,}000415}$.

Exercice III (sur 5 points)

On considère les points A(-2 ; 0 ; 1), B(1 ; 2 ; -1) et C(-2 ; 2 ; 2).

1. (a) $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times0+2\times2+(-2)\times1=2$, donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2}$

   $AB=\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}=\boxed{\sqrt{17}}$; $AC=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\boxed{\sqrt{5}}$.

   (b) Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$ donc

   $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{85}}$

   d'où $\boxed{\widehat{BAC}\approx 77{,}47\ ^\circ}$.

   (c) L'angle $\widehat{BAC}$ n'est pas un angle nul, ni un angle plat, donc les points A, B et C ne sont **pas alignés**.

2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires qui définissent le plan (ABC).

   Cherchons un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ normal à ce plan. Il doit être orthogonal à ces deux vecteurs, puisque ce sont deux vecteurs non colinéaires qui définissent ce plan (ABC).

   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donnent comme système :

   $\begin{cases}3a+2b-2c=0\\2b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-2b\\3a+6b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-2b\\a=c\end{cases}$.

   Choisissons $b=1$; on obtient $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

   Une équation du plan (ABC) est alors $-2\left(x-x_A\right)+\left(y-y_A\right)-2\left(z-z_A\right)=0 \Leftrightarrow -2(x+2)+y-2(z-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{-2x+y-2z-2=0}$

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y-3z+3=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x-2y+6z=0$. $\overrightarrow{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$; $\overrightarrow{n}_2\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$.

   Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires, donc les deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

   Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&-2\\y&=&-1+3t\\z&=&t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

   Soit $M(-2\ ;\ -1+3t\ ;\ t)$ un point de $\mathscr{D}$.

   On a : $x_M+y_M-3z_M+3=-2-1+3t-3t+3=0$ donc, pour tout t, M appartient au plan $\mathscr{P}_1$. $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}_1$.

   $x_M-2y_M+6z_M=-2-2(-1+3t)+6t=0$ donc, pour tout t, M appartient au plan $\mathscr{P}_2$. $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}_2$.

   $\mathscr{D}$ est donc l'intersection de ces deux plans.

4. Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}=1$ donc $\mathscr{D}$ est sécante au plan (ABC).

   On cherche l'intersection de $\mathscr{D}$ et du plan (ABC).

   Soit $M(-2\ ;\ -1+3t\ ;\ t)$ un point de $\mathscr{D}$. M appartient au plan (ABC) équivaut à

   $4-1+3t-2t-2=0 \Leftrightarrow 1+t=0 \Leftrightarrow t=-1$.

   Le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et du plan (ABC) est le point $\boxed{E(-2\ ;\ -4\ ;\ -1)}$.

5. (a) Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$ et de rayon $r=3$.

   $M\in\mathscr{S} \Leftrightarrow \Omega M=3 \Leftrightarrow \Omega M^2=9$

   $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-6y+9+z^2-2z+1=9 \Leftrightarrow$ $\boxed{x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+2=0}$.

   (b) On cherche l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

   Soit $M(-2\ ;\ -1+3t\ ;\ t)$ un point quelconque de $\mathscr{D}$. Il apparient ausi à $\mathscr{S}$ si, et seuement si, ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{S}$.

On obtient :
$(-2)^2+(-1+3t)^2+t^2-2\times(-2)+6(-1+3t)-2t+2=0 \Leftrightarrow 10t^2+10t+5=0 \Leftrightarrow 2t^2+2t+1=0$.
$\Delta=-4<0$ donc la droite ne coupe pas la sphère.

(c) $d(\Omega\ ;\ (ABC)) = \dfrac{\left|-2x_\Omega+y_\Omega-2z_\Omega\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3$ qui est le rayon de la sphère donc la sphère est bien **tangente** au plan (ABC).

Exercice IV (sur 5 points)

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Partie A - Algorithmique et conjectures

1. Affecter à u la valeur $\boxed{\dfrac{n\times u_n+1}{2(n+1)}}$

   Affecter à n la valeur $\boxed{n+1}$.
2. Il faut rajouter avant le Fin Tant que : $\boxed{\text{« Afficher la variable } u \text{ »}}$.
3. La suite (u_n) semble être **décroissante** vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1. Pour tout entier $n\geqslant 1$, $v_{n+1}=(n+1)u_{n+1}-1$ $=(n+1)\times\dfrac{n\times u_n+1}{2(n+1)}-1=\dfrac{n\times u_n+1}{2}-\dfrac{2}{2}=\dfrac{n\times u_n-1}{2}=\boxed{\dfrac{1}{2}v_n}$.

   Cette relation montre que la suite (v_n) est **géométrique** de raison $\boxed{\dfrac{1}{2}}$ et de premier terme

   $v_1=1\times u_1-1=\boxed{\dfrac{1}{2}}$.
2. On a donc pour tout entier $n\geqslant 1$, $v_{n+1}=0,5\times 0,5^{n-1}=\boxed{0,5^n}$.

   Or $v_n=nu_n-1 \iff u_n=\dfrac{v_n+1}{n}=\boxed{\dfrac{1+0,5^n}{n}}$.
3. Comme $-1<0,5<1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}0,5^n=0$, et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, on a donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0}$.
4. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :

   $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1+(0,5)^{n+1}}{n+1}-\dfrac{1+(0,5)^n}{n}=\dfrac{n+n\times 0,5^{n+1}-(n+1)-(n+1)\times 0,5^n}{n(n+1)}=\dfrac{-1+0,5n\times 0,5^n-(n+1)\times 0,5^n}{n(n+1)}=\dfrac{-1+0,5^n(0,5n-n-1)}{n(n+1)}=\dfrac{-1+0,5^n(-0,5n-1)}{n(n+1)}=\boxed{-\dfrac{1+(1+0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}}$.

   Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :

   $u_{n+1}-u_n<0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est **décroissante** (vers zéro).

Partie C - Retour à l'algorithmique

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u\geqslant 0,001$ Affecter à u la valeur $\dfrac{n\times u+1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable n