TS : TD fonction exponentielle (1)

I

On rappelle que exp est l'unique fonction non nulle dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On cherche une fonction f non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = \lambda \end{cases}$ $\lambda \neq 0$.

Pour cela, on pose $g = \dfrac{1}{\lambda} f$.

1. Montrer qu'alors, $g' = g$ et que $g(0) = 1$.
2. En déduire l'expression de g puis celle de f. (on admet que g est unique)

II

On cherche une fonction f, non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\begin{cases} f' = kf \\ f(0) = 1 \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \exp(kx)$ convient.
2. Comment montrerait-on l'unicité d'une telle fonction
3. En déduire une fonction f telle que $\begin{cases} f' = 2f \\ f(0) = 1 \end{cases}$
4. En déduire une fonction f telle que $\begin{cases} f' = 2f \\ f(0) = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

III

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Si, pour tout x réel, on a $f'(x) = f(x)$, peut-on affirmer que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que , pour tout x réel, $f''(x) = f(x)$?
2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(x)$, peut-on affirmer que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = f(x)$?

IV

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a). $\exp(3x+4)$ b). $x\exp(2x)$

c). $\sqrt{\exp(x)}$ d). $(\exp(x))^3$