

TS : Propriétés algébriques des nombres complexes

I Produit

1. Soit a et b deux réels quelconques.
Montrer que $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.
2. Calculer $(1 + i)^2$, $(1 + i)^3$ et $(1 + i)^4$.
3. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - (a) Calculer j^2 puis j^3 .
 - (b) En déduire j^n selon les valeurs de n .

II

1. Soit $z = 3 + 4i$; calculer $z\bar{z}$.
2. Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Calculer $z\bar{z}$.
Pouvait-on deviner la réponse sans calcul?

III Inverse d'un nombre complexe

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{l} A = \frac{1}{i} \\ B = \frac{1}{2+3i} \\ C = \frac{1}{7-4i} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} D = \frac{1}{j} \text{ où} \\ j = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} \right.$$

IV Quotient de deux nombres complexes

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$A = \frac{2+3i}{5-7i} \quad \left| \quad B = \frac{5+9i}{5-9i} \right.$$

V

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on associe, à tout point M d'affixe z ; le point M' d'affixe $z' = \frac{z-3}{iz+2}$.
On désigne par A le point d'affixe 3 et par B celui d'affixe $2i$.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' réels.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
2. Démontrer que l'ensemble Γ des points M du plan, tels que M' soit un point de l'axe des réels $(0; \vec{u})$, est le cercle de diamètre $[AB]$ privé d'un point que l'on précisera.
3. Résoudre l'équation $\frac{z-3}{iz+2} = 1$.
On désigne par K le point d'affixe $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$.
Justifier sans calcul que $K \in \Gamma$.