TS : TD (probabilités conditionnelles)

I

Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un certain pays. On estime 7 % des bovins atteints.

On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie.

On a constaté que :

- lorsque un animal est malade, le test est positif dans 87 % des cas
- lorsque un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas.

Pour un animal désigné au hasard, on note M « l'événement l'animal est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Calculer les probabilités des événements :
   (a) $M \cap T$
   (b) $M \cap \overline{T}$
   (c) $\overline{M} \cap T$
   (d) $\overline{M} \cap \overline{T}$
2. Déterminer la probabilité de T.
3. Calculer la probabilité qu'un animal ayant un test négatif soit malade.

II Inverser un arbre de probabilités

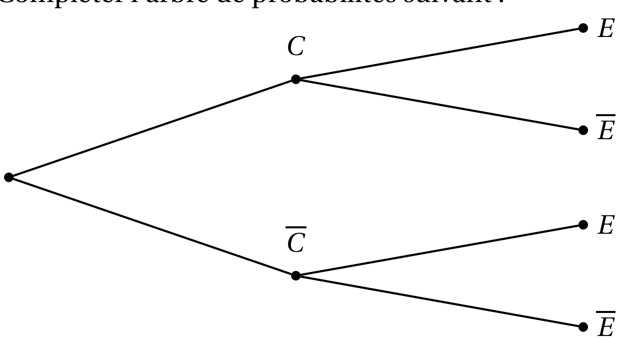
Un sondage effectué récemment dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultas suivants :

- 65 % des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage ;
- parmi les personnes qui sont contre ce barrage, 70 % sont des écologistes ;
- parmi les personnes qui sont pour la construction de ce barrage, 20 % sont ds écologistes.

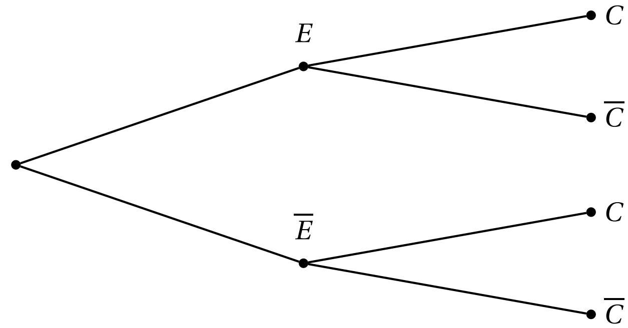
On note C l'événement « La personne interrogée au hasard est contre ce barrage ».

On note E l'événement : « La personne interrogée est écologiste ».

1. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Calculer la probabilité de l'événement E.
3. On inverse l'arbre de probabilités ; compléter l'arbre ci-dessous :



III Le jeu est-il favorable ?

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

L'urne U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n entier, $n \geqslant 1$).

L'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces deux opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'événement A : « Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».
   (a) Montrer que $p(A) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)$.
   (b) Déterminer la limite de $p(A)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. On considère l'événement B : « Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
   Vérifier que $p(B) = \dfrac{6}{4(n+3)}$.
3. Un joueur mise 20 € et effectue une épreuve. L'issue de cette épreuve, on compte le nombre de boules blanches contenues dans l'urne U_2.
   - Si U_2 contient 1 boules blanches, le joueur reçoit $2n$ €.
   - Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n €.
   - Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

   (a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
   Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur le gain algébrique du joueur.
   Par exemple, si après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance de X.
   (d) On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance est strictement positive.
   Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.