

TS : TD - Différents types de raisonnements utilisés en mathématiques

Notation : un énoncé mathématique (vrai ou faux) est appelé **proposition**.

Exemples :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ est une proposition vraie.
- Tout triangle est rectangle est une proposition fausse.
- Une équation n'est pas une proposition

Toute la logique mathématique est basée sur un principe fondamental des mathématiques : « **le principe du tiers exclu** » : une propriété est soit vraie, soit fausse.

Alors, si une propriété est vraie, sa **négation** est fausse et réciproquement.

I Quantificateurs

I.1 Quantificateur existentiel

Dans la proposition mathématique « Il existe (au moins) un réel x tel que $\frac{1}{x} > 0$, l'expression « il existe au moins ... tel que » est appelé quantificateur existentiel; on utilise alors le symbole mathématique \exists .

On écrit alors : $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} > 1$.

Exercice : Écrire à l'aide de ce quantificateur la proposition : « il existe un entier naturel n tel que n^2 soit supérieur à 23. »

I.2 Quantificateur universel

Dans la proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ », la locution « Pour tout » est appelée quantificateur universel, noté \forall .

On écrirait : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice : Écrire à l'aide de ce quantificateur la proposition : « le carré de tout nombre réel est positif ou nul. »

I.3 Négation

La négation d'une proposition « P » est la proposition contraire « non P », notée par voir \bar{P} . Si l'une est vraie, l'autre est fausse et réciproquement.

La négation de \forall est \exists et réciproquement.

Exemple : Soit la proposition **vraie** : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. La proposition contraire (**fausse**) est : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.

I.4 Exercice

Écrire la négation des propositions suivantes et préciser laquelle est vraie.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 > x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2 + 1} < 1$
3. Tout triangle est rectangle.
4. Tout carré est un losange.
5. Tout nombre premier est impair.
6. Il existe un réel x tel que $x^2 + x + 1 = 0$

II Raisonnement par contre-exemple

Exemple :

Soit la propriété P : « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 \neq 0$. On veut montrer que cette proposition est fausse.

Il est équivalent de montrer que la proposition contraire non P $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 = 0$ est vraie.

Autrement dit, il suffit d'exhiber un réel x rendant nulle l'expression $x^2 + 2x + 1$.

Donner ce contre-exemple.

III Raisonnement par contraposée

Soit (P) la proposition mathématique : Si A, alors B, notée aussi $A \Rightarrow B$.

Exemple : (Théorème de Pythagore :) Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Définition

La proposition contraposée de (P) ou plus simplement la contraposée de (P) est la proposition :

« Si non B, alors non A » notée aussi (Non B) \Rightarrow (Non A).

Exemple : Contraposée du théorème de Pythagore :

Si, dans le triangle ABC, $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle.

Remarque : ne pas confondre avec la réciproque du théorème de Pythagore :

Si, dans le triangle ABC, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle.

Exercice :

- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}$.
- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}$.
- Comment traduire ces deux propriétés en une seule?

Exercice :

Démontrer la proposition « Soit x un nombre réel tel que pour tout $\varepsilon > 0, x \leq \varepsilon$. Alors $x \leq 0$. »

IV Raisonement par l'absurde

Définition :

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique, consistant soit à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire, soit à montrer la fausseté d'une proposition en déduisant logiquement des conséquences absurdes.

Exemple : On souhaite démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On va donc essayer de voir ce qu'il se passe si l'on considère que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire le quotient de deux entiers relatifs .

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il peut se mettre sous la forme d'un quotient d'entiers, donc il existe deux entiers p et q ($q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\text{PGCD}(p; q) = 1$ (p et q sont premiers entre eux, c'est-à-dire n'ont aucun facteur premier commun).

Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, alors $p = \sqrt{2} \times q$ donc $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est un nombre pair et donc p est pair. (voir exemple sur la contraposée).

Puisque p est un nombre pair, alors il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$.

On a donc $(2k)^2 = 2q^2$ donc $4k^2 = 2q^2$ donc $q^2 = 2k^2$, donc q^2 est pair et q est pair. (voir exemple sur la contraposée).

Or p et q ne peuvent pas être pairs tous les deux car p et q sont premiers entre eux donc l'hypothèse est fautive :

$\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel mais un irrationnel.

Exercice : démontrer que l'ensemble I des rationnels strictement supérieurs à 1 n'a pas de plus petit élément

V Raisonement par récurrence

Nous avons vu ce type de raisonnement en cours.

VI Raisonement par disjonction des cas

Définition :

Lors d'un raisonnement par disjonction des cas, on étudie tous les cas possibles en faisant au préalable un tri pour restreindre le nombre de cas à étudier.

Exemple : Démontrer que pour tout entier naturel n , le produit $n(n+1)$ est divisible par 2.

- Premier cas : n est pair. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
Alors : $n+1 = 2k+1$ et $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2[k(2k+1)] = 2m$ avec $m = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
 $n(n+1)$ est pair.
- Deuxième cas : n est impair. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

Alors : $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$ et $n(n+1) = (2k+1) \times 2(k+1) = 2[(k+1)(2k+1)] = 2p$ avec $p = (k+1)(2k+1) \in \mathbb{N}$.
 $n(n+1)$ est pair.

On en déduit que, dans tous les cas, $n(n+1)$ est pair.

Exercice : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n + 1$ est pair (considérer le chiffre des unités de 3^n)