Exercices sur les suites

I Vrai ou faux ?

(Questions possibles au bac pour une Restitution Organisée des Connaissances ou un QCM).

Répondre par vrai ou faux et justifier chaque réponse.

1. Si une suite n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.
3. Si une suite est strictement croissante alors elle tend vers $+\infty$.
4. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.
5. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante.
6. Toute suite bornée est convergente (c'est-à-dire possède une limite réelle).
7. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

II

Justifier les limites suivantes avec la définition :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+3=+\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+6=-\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 6-n^2=-\infty$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\sqrt{n}=+\infty$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3}{n+1}=+\infty$

III

1. Démontrer par récurrence que, pour pour tout réel x positif et tout $n \geq 0$:
$$(1+x)^n \geq 1+nx\text{(inégalité de Bernoulli}\}.$$
2. En déduire que, si $q>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.
3. En déduire la limite de q^n lorsque $0<q<1$.
4. En déduire la limite de q^n lorsque $-1<q<0$.

IV

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+2}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. On appelle f la fonction, définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.
Montrer que f est croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$.
3. Calculer $f(1)$ puis montrer que $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$.
4. Prouver par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
5. Démontrer que la suite est majorée par $\sqrt{3}$.
6. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
7. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$v_n=\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$$
.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n