Devoir surveillé commun n^{o} 1 - TS - 14/10/17

<u>Exercice 1 :</u> On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

1. On considère les trois algorithmes ci-dessous. Un seul d'entre eux calcule et affiche les termes u_n et v_n, la valeur de l'entier naturel n étant saisie par l'utilisateur. Lequel ? Justifier soigneusement.

<u>Algorithme 1 :</u>

Variables :
n et i : entiers naturels
u et v : réels
Entrée :
Saisir la valeur de n
Traitement :
u prend la valeur 1
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n :
  u prend la valeur $2u-(i-1)+3$
  v prend la valeur 2^i
Fin Pour
Sortie :
Afficher u
Afficher v

<u>Algorithme 2 :</u>

Variables :
n et i : entiers naturels
u et v : réels
Entrée :
Saisir la valeur de n
Traitement :
u prend la valeur 1
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n :
  u prend la valeur $2u - i + 3$
  v prend la valeur 2^i
Fin Pour
Sortie :
Afficher u
Afficher v

<u>Algorithme 3 :</u>

Variables :
n et i : entiers naturels
u et v : réels
Entrée :
Saisir la valeur de n
Traitement :
u prend la valeur 1
v prend la valeur 1
Pour i allant de 0 à $n-1$:
  u prend la valeur $2u - i + 3$
  v prend la valeur 2^i
Fin Pour
Sortie :
Afficher u
Afficher v

2. Comment le modifier afin qu'il affiche tous les termes de ces deux suites jusqu'à l'indice n inclus ?
3. En entrant les suites dans la calculatrice, on obtient le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	...	10	11	12	13
u_n	1	5	12	25	50	...	3080	6153	12298	24587
v_n	1	2	4	8	16	...	1024	2048	4096	8192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Etude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Etude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

   Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Exercice 2 :

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1100. Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1100$, faire :
		Affecter à a la valeur ...
		Affecter à n la valeur ...
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau. Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Exercice 3 : Bonus

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.
Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.