TS : DM nº 4

I

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**

   Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

2. g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par

   $$g(x) = 2x\ln(2x+1).$$

   Proposition 2

   Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

   Proposition 3

   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1+\ln 4$.

3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x+3y-z-11=0$ et

   $x+y+5z-11=0$.

   Proposition 4

   Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement.

II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.
2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

   (c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n+1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

   (a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

   (b) Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?
4. (a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

   (b) On admet que $z_n = r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

   (c) Compléter la figure donnée à la fin de la feuille, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.

   Les traits de construction seront **apparents**.

III

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
   (a) $z^2-2z+5=0$.
   (b) $z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}=0$.
2. Soient A, B, C et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
   $z_A=1+2\text{i}$; $z_B=1+\sqrt{3}+\text{i}$; $z_C=1+\sqrt{3}-\text{i}$ et $z_D=1-2\text{i}$.
   (a) Faire une figure et placer ces quatre points.
   (b) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.
   (c) Vérifier que $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\text{i}\sqrt{3}$.
   Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?
   (d) En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.

IV Intensité sonore et niveau d'intensité sonore

L'intensité sonore est une grandeur qui représente la « puissance » d'un son, elle s'exprime en W.m^{-2}.

L'intensité sonore à partir de laquelle un son est audible pour un homme est $I_0=10^{-12}$ W.m^{-2}.

Pour manipuler des valeurs plus pratiques, on définit le niveau d'intensité sonore L , exprimé en décibels, par la relation : $L=10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ où I est l'intensité sonore.

1. Calculer le niveau d'intensité sonore de I_0.
2. Un son devient douloureux à partir de 130 décibels. Déterminer l'intensité sonore correspondante.
3. Lorsque l'intensité sonore d'un bruit est doublée, déterminer de combien augmente le niveau d'intensité sonore.
4. On considère une sirène d'alerte qui émet un son de 110 dB à 1 m de l'émetteur.

   (a) Calculer l'intensité du son émis par la sirène à 1 m .
   (b) Combien de telles sirènes, placés à 1 m du récepteur, doivent émettre un son en même temps pour le niveau d'intensité sonore atteigne le seuil de douleur ?

V Quand boire sa tasse de café ?

Il fait 20 degrés dans une pièce. Une personne vient de se faire du café et s'en verse dans une tasse. Il est à une température de 80 °. A bout de deux minutes, le café est à une température de 60 °.

Il aime le boire quand il a refroidi et atteint une température de 40 °.

On admet que l'évolution de la température du café sui la loi de refroidissement de Newton et est donnée par la fonction $f(t)=60\text{e}^{kt}+20$, oùk est une constante. (60 correspond à la différence des températures entre le café à l'instant $t=0$ et celle de la pièce)

1. Calculer cette constante k
2. Au bout de combien de temps peut-il espérer boire son café ?