TS : DM3

Une théorie mathématique ne doit être regardée comme parfaite que si elle a été rendue tellement claire qu'on peut la faire comprendre au premier individu rencontré dans la rue. David Hilbert en 1900

I

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : A et B des nombres réels
K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
Affecter à A la valeur $\dfrac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$
Affecter à B la valeur $\dfrac{B}{3}$
FinPour
Afficher A

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

(b) Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).
3. (a) On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2|z_n|}{3}.$$

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

II

On considère une suite arithmético-géométrique (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des réels non nuls et $a \neq 1$.

1. Soit f la fonction $x \mapsto ax + b$. Déterminer son point fixe, c'est-à-dire la solution β de l'équation $f(x) = x$.
2. Puisque β est le point fixe de f, on a : $\beta = a\beta + b$.
   On définit alors une suite auxiliaire (v_n) par

$$v_n = u_n - \beta \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   Montrer que (v_n) est géométrique de raison a. On précisera son premier terme en fonction de u_0.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
4. **Application** : soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n - 3 \end{cases}.$$

   Donner l'expression de u_n en fonction de n.
5. Cette suite est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

III

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,-4] \cup [0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x} - 2x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1. (a) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto x^2+4x$.
   (b) En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+4x}$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. (a) Peut-on raisonner comme à la question 2. pour déterminer la limite de f en $+\infty$?
   (b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Justifier que, pour tout réel positif,
   $$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}} - 2\right).$$
   (d) En déduire la limite de f en $+\infty$; comparer avec la conjecture faite à la calculatrice.

IV

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
À l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n :
- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :

  soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;

  soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :

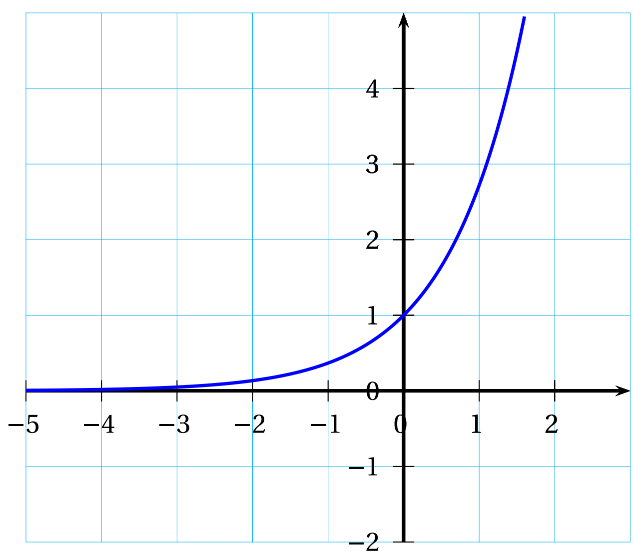
  soit en C, soit en A de façon équiprobable
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « à l'instant n la puce est en A »(respectivement en B, en C).
On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'évènement A_n, (respectivement B_n, C_n).
On a donc : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.
Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer a_k, b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} & = & = \frac{1}{3}a_n \end{array}\right.$
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel p, $\left\{\begin{array}{lll} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} & b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p \end{array}\right.$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
   On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

V

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.
   Démontrer que la droite $\mathscr{D}_\mathrm{e}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.
3. Démontrer cette conjecture.