Devoir sur feuille n° 2

Les mathématiques devraient être regardées comme l'alphabet de toute philosophie. (Francis Bacon)

I

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3x^2-5x-1=0$

b) $x^4+4x^2-21=0$

II

1. Déterminer un nombre entier n, racine du polynôme $x^3-150x+500$. (On pourra utiliser une calculatrice)
2. Montrer que pour tout réel x,
$$x^3-150x+500=(x-n)\left(ax^2+bx+c\right)$$
où a, b et c sont des réels à déterminer.
3. En déduire les solutions de l'équation
$$x^3-150x+500=0.$$

III

Résoudre soigneusement l'inéquation $\dfrac{2x+5}{x-5}\leqslant\dfrac{3x-1}{3x+1}$

IV

On donne la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} t_0=0 \\ t_{n+1}=t_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$.
Démontrer par récurrence que, pour tout naturel n, on a :
$$t_n=\frac{n}{n+1}.$$

V

On réalise une expérience aléatoire. A désigne un évènement et $\overline{A}$ son évènement contraire.

On pose $p(A)=x$.

1. Exprimer $p\left(\overline{A}\right)$ en fonction de x.
2. Déterminer les valeurs possibles de x sachant que : $p(A)\times p\left(\overline{A}\right)=0,24$.

Partie B

La « Revue Spéciale d'Économie » et le « Guide des Placements en Bourse » sont deux magazines mensuels offrant à leurs lecteurs la possibilité d'abonnement communs.

On s'intéresse à l'ensemble des lecteurs de l'une ou l'autre de ces deux revues.

Parmi ces lecteurs, certains sont abonnés. Les abonnés ont souscrit soit l'un des deux abonnements, soit les deux abonnements simultanément.

Une étude a permis de constater que :

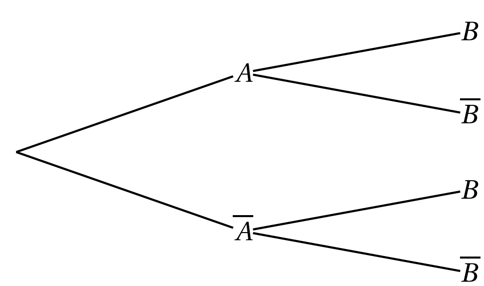
— 60 % de l'ensemble des lecteurs ont souscrit un abonnement à la ´ Revue Spéciale d'Économie », et parmi eux $\frac{3}{5}$ ont aussi choisi l'abonnement au « Guide des Placements en Bourse » ;

— 10 % des lecteurs n'ayant pas choisi l'abonnement à la « Revue Spéciale d'Économie », ont souscrit l'abonnement au « Guide des Placements en Bourse ».

On note :
A l'évènement : « le lecteur a choisi l'abonnement à la "Revue Spéciale d'Économie" » ;
B l'évènement : « le lecteur a choisi l'abonnement au "Guide des Placements en Bourse" ».

On interroge un lecteur au hasard.

1. Déduire de l'énoncé les probabi1ités $p(A)$, $p\left(\overline{A}\right)$ et $p_{\overline{A}}(B)$.
Reproduire et compléter l'arbre suivant :



2. (a) Traduire par une phrase l'évènement $A\cap B$. Donner sa probabilité.
   (b) Traduire par une phrase l'évènement $\overline{A}\cap\overline{B}$. Donner sa probabilité.
3. Calculer $p(B)$. En déduire la probabilité qu'un lecteur soit abonné à la « Revue Spéciale d'Économie » sachant qu'il est abonné au « Guide des Placements en Bourse ».
4. On interroge au hasard 3 lecteurs indépendamment les uns des autres. Calculer la probabilité pour qu'au moins l'un d'eux ait choisi l'abonnement au « Guide des Placements en Bourse ».

VI

Le graphique ci-dessous sera complété et remis avec la copie.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\ ;\ 2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} = f(u_n).$$
   $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,
   $$v_{n+1} = f(v_n).$$
   (a) Le graphique donné ci-dessous représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

   (b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$ et
   $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

   (d) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

   (e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
   Déterminer la valeur exacte de α. (on admettra que α est solution de l'équation $f(x) = x$)