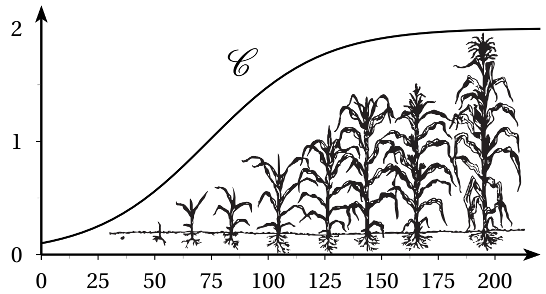
TS : Exercices (fonction exponentielle)

I Croissance du maïs

On a représenté ci-dessous la hauteur (en mètres) d'un plant de maïs en fonction du temps (en jours).



On modélise cette croissance par une fonction du type :

$$h : t \mapsto \frac{a}{1+b\mathrm{e}^{-0{,}04t}}.$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est le temps (en jours) et $h(t)$ la hauteur (en mètres) du plant.

On sait que le plant mis en terre mesurait 0,1 m et que sa hauteur plafonnera à 2 m.
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

II Distribution de Maxwell-Boltzmann

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse de v centimètres par seconde.
Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann F définie par la formule :

$$F(v) = cv^2\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

où c et k sont des constantes positives, T est la température en °K (degrés Kelvin), m la masse d'une molécule.
Quelle est la valeur maximale de F ?

III D'après Pondichéry avril 2008

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20-u_n).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20-x).$$

   (a) Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.

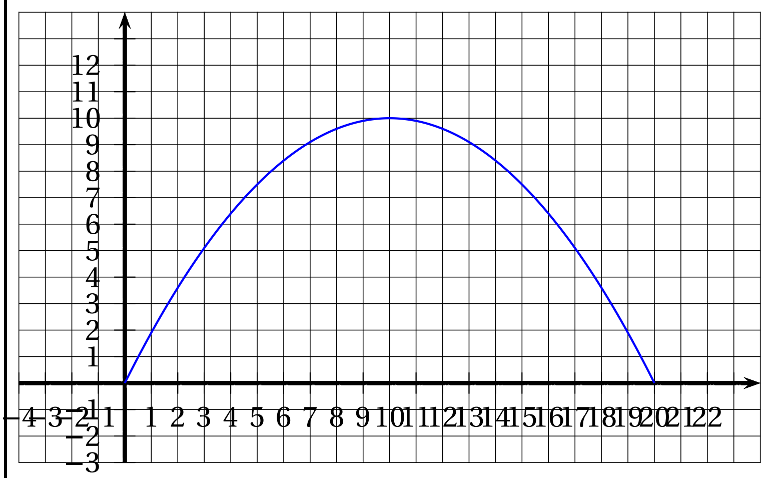
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.

   (c) On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.

   Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.



Partie B : un modèle continu

Soit $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+1}$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

1. Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
3. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?