LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES

Table des matières

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux variables aléatoires X qui prennent leurs valeurs dans un intervalle.

I Densité et loi de probabilité

I.1 Densité de probabilité

Définition

Soit I un intervalle. On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f **continue**, sauf éventuellement en un nomnbre fini de valeurs, et **positive** sur I telle que :

$$\int_I f(x)(dx = 1$$

Remarques :

- Si $I = [a, b]$, alors la quantité notée $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne simplement $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si I est un intervalle non borné, par exemple $[a\,;\,+\infty[$, alors la quantité notée $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne, lorsqu'elle existe, la limite suivante :

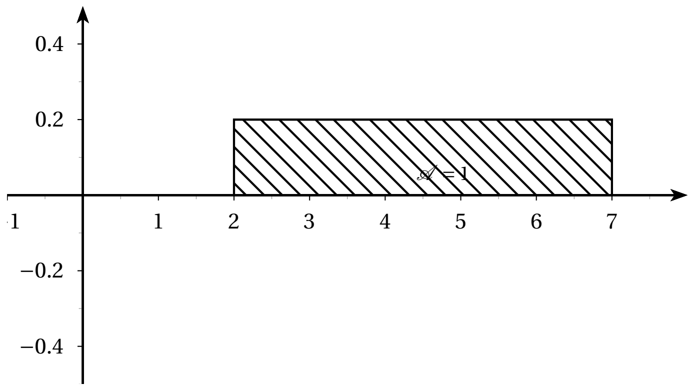
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si I est du type $]-\infty\,;\,a[$:
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Enfin, si $I=\mathbb{R}$, alors la quantité notée $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne, lorsqu'elles existent, la somme des deux limites suivantes :
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

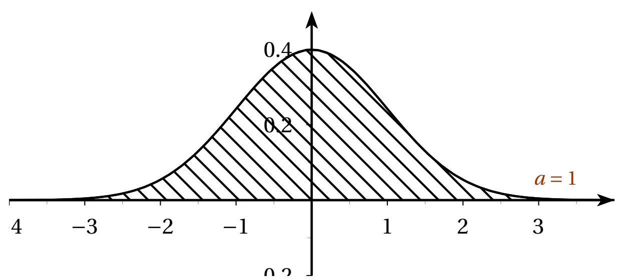
- $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses pour x appartenant à I

Exemples :

a) $f : x \mapsto \frac{1}{5}$ sur $[2\,;7]$



b) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$.



Exemples :

1. Déterminer un réel a de façon que la fonction f définie sur $[0,\,1]$ par $f(x) = x+\alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0,1]$.

   On cherche a tel que : $\int_0^1 (x+\alpha)\,\mathrm{d}x = 1$

   $\int_0^1 (x+\alpha)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2}+\alpha x\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$

2. Soit f une fonction constante sur un intervalle [a, b] (avec a < b). Quelle doit être la valeur de la constante γ pour qu'elle soit une densité ?

   On trouve : $\gamma(b-a) = 1$, donc $\boxed{\gamma = \frac{1}{b-a}}$.

3. Soit λ un réel strictement positif. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
   f est bien continue (sauf en 0) et positive.
   Calculons : $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-\lambda a}) = 1$.
   On en déduit que f est bien une densité sur $\mathbb{R}$.

I.2 Probabilité d'un événement

Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω, continue, de densité f.
La probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ est définie comme l'aire du domaine défini par $x \in J$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

En effet, cette définition est légitime car on a : $P(I) = 1$ et on peut montrer que l'on retrouve toutes les propriétés requises pour définir une probabilité.

Remarques :

• Puisque $[a,b]$ est inclus dans I et que f est positive sur I, on bien $P([a,b]) \in [0,1]$.

• La probabilité d'un singleton $\{x_0\}$ (ou intervalle réduit à un point) est nulle. En effet :
$P(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
On dit alors que x_0 est un événement "quasi-impossible".

• La définition s'étend à des intervalles non bornés lorsque la limite de l'intégrale existe.

Cas particuliers :

• Si f est constante sur $[a,b]$ (égale à $\dfrac{1}{b-a}$ d'après un calcul précédent), on dit que P est la **loi uniforme**.

• Si f est de la forme $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\lambda > 0$, on dit que P est la **loi exponentielle** de paramètre λ.

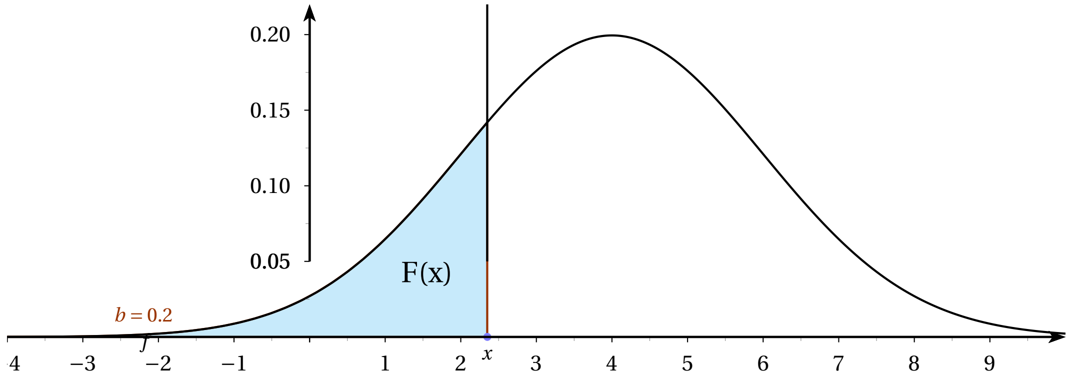
I.3 Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire continue de densité f dont la courbe représentative est $\mathscr{C}_f$.
La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X \in]-\infty\,;\,x]).$$

Illustration graphique :



$F(x)$ correspond à l'aire comprise entre la courbe représentative de la densité, l'axe des abscisses et pour une abscisses inférieure à x.

Remarques :

- Comme $P(X = x) = 0$, $P(X \leqslant x) = P(X < x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
- F est continue et croissante sur $\mathbb{R}$.
  La continuité vient de la définition sus forme d'intégrale et la croissance vient de la définition comme une aire.
- **Interprétation d'une probabilité à l'aide de F :**

Propriété

$P(X \leqslant b) = P(X < b) = F(b)$.

$P(X \geqslant b) = P(X > b) = 1 - F(b)$

$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

II Loi uniforme

II.1 Définition

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ signifie que la fonction de densité est constante sur $[a\,;\,b]$ et nulle ailleurs.

Par conséquent : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On écrit parfois que X suit la loi $\mathscr{U}([a\,;\,b])$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a\,;\,b])$.

Propriété

Soient a et b deux réels avec $a \leqslant b$. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a\,;\,b])$.
La fonction de répartition F associée à X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$$

II.2 Espérance

Définition

L'espérance d'une variable aléatoire associée à une fonction de densité f définie sur un intervalle I est $\displaystyle\int_I x f(x)\,\mathrm{d}x$

Propriété : l'espérance d'une variable aléatoire d'une loi uniforme sur [a ; b] est : $E(x) = \dfrac{a+b}{2}$.

Démonstration :

$$E(x) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Exemple : Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n° 14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ? $P(3 \leq X \leq 5) = \dfrac{5-3}{6} = \dfrac{1}{3}$.

III Loi exponentielle

Définition

Soit λ un nombre réel strictement positif.
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque la fonction de densité associée est $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Propriété

Soit $\lambda > 0$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
La fonction de répartition associée est définie par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Exemple : On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie :
   $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \displaystyle\int_0^{10} 0,1e^{-0,1t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{e}$.
2. On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
   $P_{X>10}(X > 12) = \dfrac{P(X > 12)}{P(X > 10)} = \dfrac{e^{-0,1\times 12}}{e^{-0,1\times 10}} = e^{-0,2} \approx 0,82$.
3. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :
   $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \displaystyle\int_0^{2} 0,1e^{-0,1t}\,\mathrm{d}t = e^{-0,2} \approx 0,82$. On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son ,ge.
   On dit que X est une loi de durée de vie sans vieillissement.

   Une étude plus systématique de ce phénomène sera faite au paragraphe suivant.

III.1 Loi de durée de vie sans vieillissement

Définition

Soit T la variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet.
On dit que T suit la loi de durée de vie sans vieillissement lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant $t+h$ sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant t ne dépend pas de son ,ge t :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h)$$

Remarque : la loi de durée de vie sans vieillissement s'applique-t-elle aux humains ? Non, ce n'est pas un modèle pertinent à long terme. En effet, un bébé à la naissance peut raisonnablement espérer vivre plusieurs dizaines d'années alors qu'on ne peut en dire autant d'un vieillard. Le modèle semble plus proche de la réalité lorsque h est petit. Par exemple la probabilité de vivre encore une minute semble comparable indépendamment de l',ge. **Mais cette loi s'applique par exemple plus à des composants électroniques**.

Théorème

Une loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement.

Démonstration :

Supposons que T suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P_(T \geq t)(T \geq t+h) = \frac{P((T \geq t+h) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)}$$

Or, l'événement $(T \geq t+h)$ est inclus dans l'événement $(T \geq t)$ donc : $P((T \geq t+h) \cap (T \geq t)) = P(T \geq t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$.
Par ailleurs : $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$
D'où : $P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geq h)$.

Remarque :

La réciproque est vraie : une loi de durée de vie sans vieillissement est une loi exponentielle.
La démonstration n'est plus au programme.

III.2 Espérance d'une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
Calculons tout d'abord l'intégrale suivante :
$\displaystyle\int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
Pour cela, posons $g(t) = t\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
On a : $g'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
On en déduit que $\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda t} - g'(t)$.

Alors : $\displaystyle\int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\mathrm{e}^{-\lambda t} - g'(t)\right]\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1\right) - \left(g(x) - g(0)\right)$
$= -\dfrac{1}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1\right) - x\mathrm{e}^{-\lambda x}$.
On fait alors tendre x vers $+\infty$.

$xe^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda} \times \lambda xe^{-\lambda x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[xe^{-\lambda x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{\lambda} \times \lambda xe^{-\lambda x}\right] = \frac{1}{\lambda} \times \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$ (croissances comparées)

On en déduit que $\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$.

IV Loi normale

IV.1 Loi normale centrée réduite

Définition

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si et seulement si sa densité f est définie par la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

La loi normale centrée réduite se note $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

0 est l'espérance μ et 1 est le carré de l'écart-type σ donc $\sigma^2 = 1$, d'où $\sigma = 1$

Théorème de « De Moivre-Laplace » (admis)

Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre réel fixé de $]0\,;1[$.

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.

Pour chaque valeur de n, l'espérance est $E(X_n) = np$ et l'écart-type $\sigma(X_n) = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$.

Pour chaque n, on pose $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-x)}}$.

Pour tous nombres a et b avec $a < b$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ce théorème montre que l'on peut approximer une loi binomiale par la loi normale.

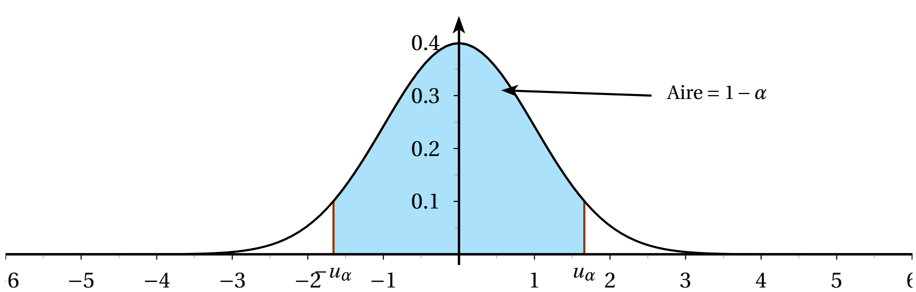
Propriété

Pour tout réel α de $[0\,;\,1[$, il existe un réel u_α tel que

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

où X désigne une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Illustration graphique :



Démonstration :
Soit $\alpha \in]0\ ;\ 1[$.
X est continue sur $\mathbb{R}$, donc on peut définir la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
Cette fonction est la primitive de la fonction f qui s'annule en 0 ; elle est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{2}$ car f est paire et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
$0 < \frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{2}$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel u_n tel que $F(u_n) = \frac{1-\alpha}{2}$.
Par parité de f et linéarité de l'intégrale, on en déduit le résultat.

Remarque Les primitives de la fonction de Gauss $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. ne peuvent pas s'exprimer pas à l'aide de fonctions usuelles.

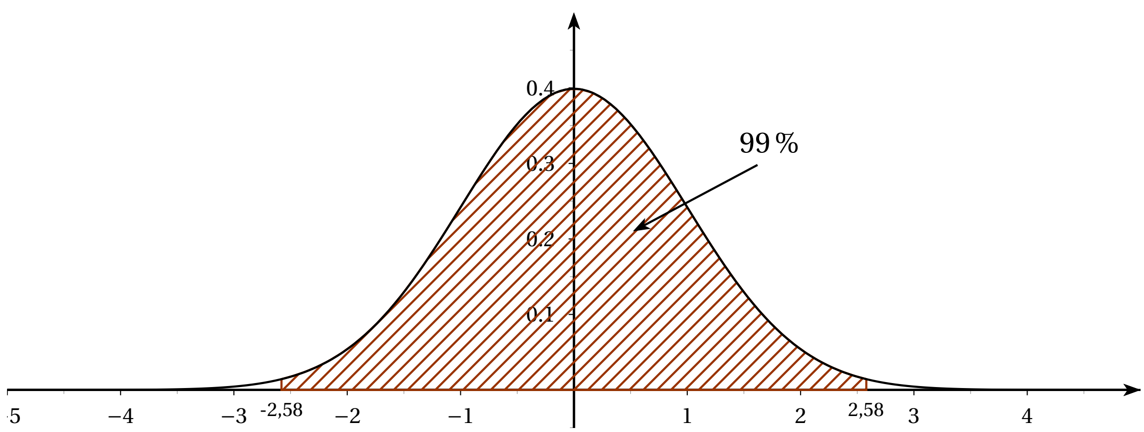
On ne peut donc pas calculer de valeur exacte de l'intégrale donc pas de valeur exacte de u_α.

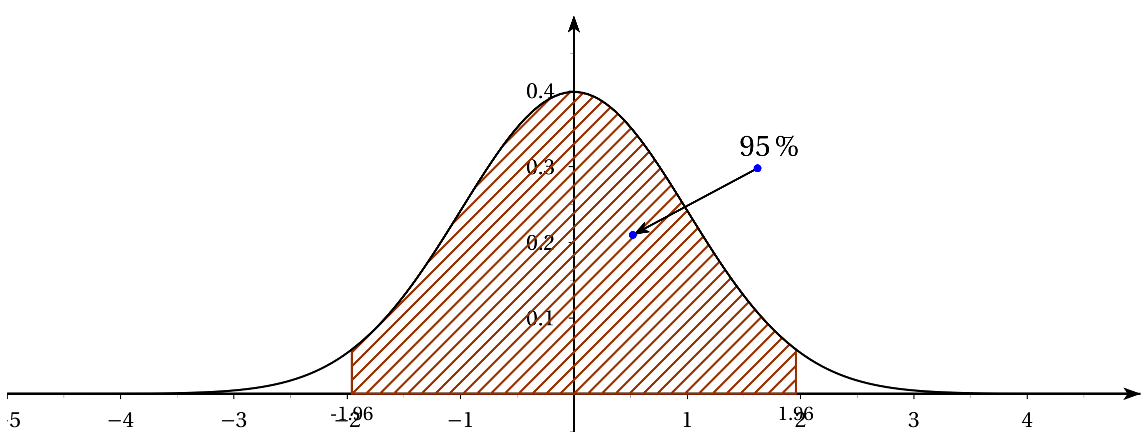
Les mathématiciens ont établi des tables de valeurs ou on peut utiliser la calculatrice pour obtenir une valeur approchée.

Cas particuliers :(à connaître)

- Pour $\alpha = 0{,}05$, $u_{0,05} \approx 1{,}96$
- Pour $\alpha = 0{,}01$, $u_{0,01} \approx 2{,}58$

Interprétation graphique :





Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
Son espérance est $E(X)=0$.

Démonstration :

Pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_0^x t\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)$.

Par passage à la limite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

De même, $\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\int_y^0 t\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Par somme, on a $E(X)=0$.

Remarque : on admet que $V(X)=1$ et donc que $\sigma(X)=1$.

IV.2 Loi normale

Définition

Une variable aléatoire X suit le loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
On note $X\hookrightarrow\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ ou $X\rightsquigarrow\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Remarque : la densité associée à une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

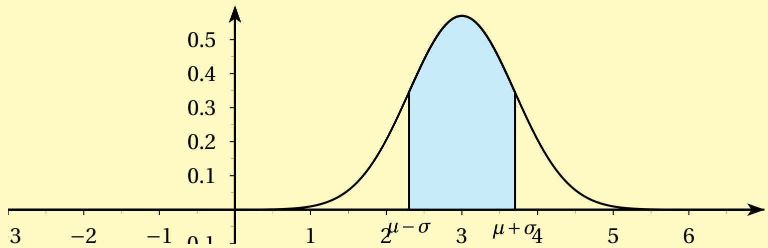
Remarques :

- Pour tout x, $f(\mu-x)=f(\mu+x)$, donc la courbe admet la droite d'équation $x=\mu$ comme axe de symétrie et le maximum est atteint pour $x=\mu$.
- Le maximum est $f(\mu)$ est vaut $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, donc devient de plus en plus grand quand σ devient de plus en plus petit.

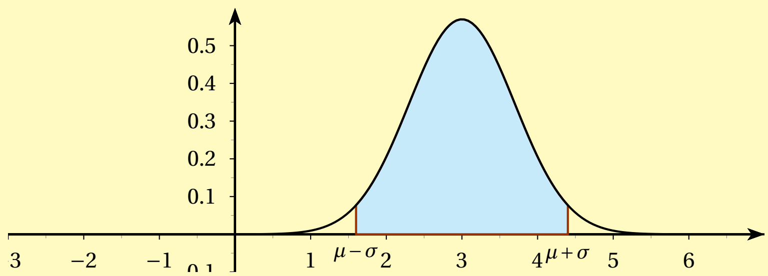
Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

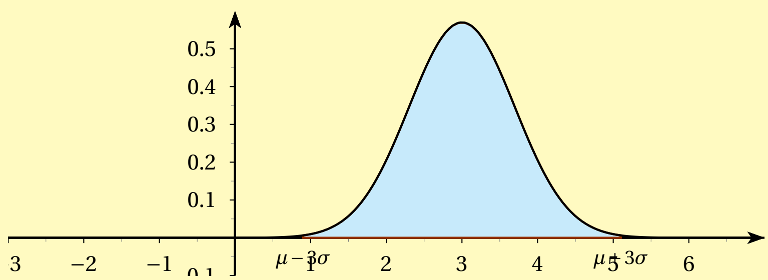
- La probabilité de l'événement $X \in [\mu-\sigma\,;\,\mu+\sigma]$ est approximativement égale à 0,68



- La probabilité de l'événement $X \in [\mu-2\sigma\,;\,\mu+2\sigma]$ est approximativement égale à 0,95.



- La probabilité de l'événement $X \in [\mu-3\sigma\,;\,\mu+3\sigma]$ est approximativement égale à 0,99.



Remarque : 99 % de l'aire est comprise entre les droites d'équations $x=\mu-3\sigma$ et $x=\mu+3\sigma$!

Démonstration :

$X \in [\mu-\sigma\,;\,\mu+\sigma] \Leftrightarrow -1 \leqslant \dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 1$.

Comme $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$, $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$P(X \in [\mu-\sigma\,;\,\mu+\sigma]) = P\left(-1 \leqslant \dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 1\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0,68$.

On ne sait pas calculer une valeur exacte de ce nombre, mais on peut calculer une valeur approchée à la calculatrice.

Exercices du livre