Exercices de révisions sur les suites

I

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}.$$

Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

II

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

III

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

1. $u_n = n^2 + 4n + 3$
2. $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$
3. $u_n = \dfrac{1-n^2}{n+2}$
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n+1}$

IV

On admet que les suites suivantes de terme général u_n ont une limite quand n tend vers $= \infty$; calculer leurs limites.

1. $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}$
2. $u_n = \dfrac{-4n^2+3n+3}{n^2-n+4}$
3. $u_n = 2n - \sqrt{4n^2-3n+1}$
4. $u_n = \dfrac{4^n-3^n}{4^n+2^n}$

V

Soit $a \in [-1\ ;\ +\infty[$. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n).

VI

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose, pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$.

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

   Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et

   $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   (a) Déterminer l'expression de S_n, puis de T_n, en fonction de n.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

VII

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   (b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.

   (c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$.

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

   (b) Déterminer la limite de la suite (x_n).