Exercices de baccalauréat

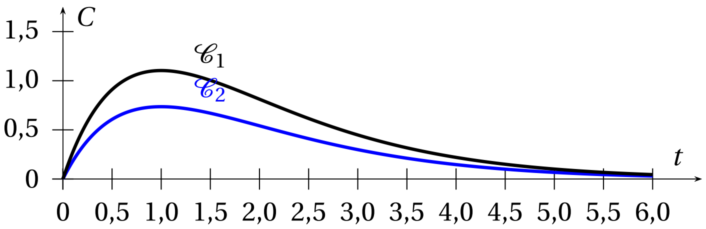
I Polynésie juin 2016

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.

   À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

   On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = At\mathrm{e}^{-t}$$

   où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

   (b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?

   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

   (a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que

   $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

   (b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?

   Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à

   5×10^{-3} g.L^{-1}.

   (a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

   (b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par

   $f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur $3,5$ p prend la valeur $0,25$ C prend la valeur $0,21$
Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire : t prend la valeur $t + p$ C prend la valeur $f(t)$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

   Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.

   Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

   Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

II Centres étrangers juin 2015

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$$

.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

   (a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :

   $$g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right).$$

   (b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

   (c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

   (b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

   (c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

   La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$u_{n+1} - u_n \geqslant g(a).$$

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

   $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

   L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que … … … Fin tant que
Sortie	Afficher n

   (a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.