

Exercices de bac sur les suites

I Antilles-Guyane juin 2014

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{array} \right.$$

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

- (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .

Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n) .
- (b) En déduire, que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

- (c) Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

II Polynésie juin 2014

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

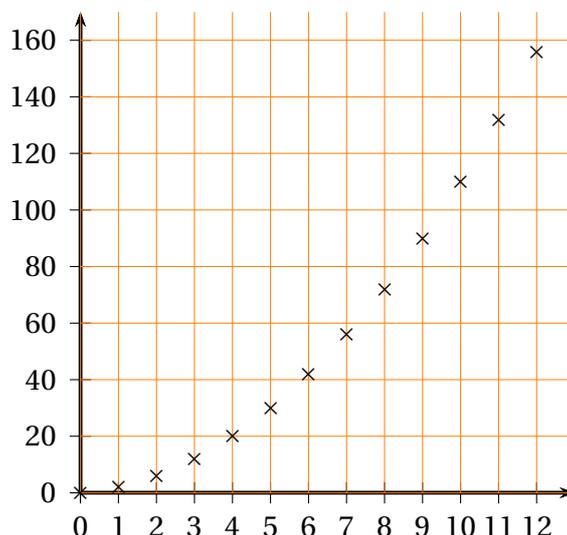
- Calculer u_1 et u_2 .
- On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
Variation : n est un entier naturel u est un réel	Variation : n est un entier naturel u est un réel
Entrée : Saisir la valeur de n	Entrée : Saisir la valeur de n
Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie : Afficher u	Sortie : Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n , la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

- À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



- Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.
 - La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.
- On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - On définit, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = (n+1)(n+2)$.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n .