

TS : exercices de bac (3)

I

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0; +\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes \mathcal{C} et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a .

Partie A

On a construit en **annexe 1** (à rendre avec la copie) les courbes \mathcal{C} , $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de \mathcal{C} et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a .

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de \mathcal{C} et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.
2. (a) On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.

Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.

Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	
x	0	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$+\infty$
$h'_a(x)$	+	0	-
$h_a(x)$	$-\infty$	$\frac{-1 - \ln(2a)}{2}$	$-\infty$

(b) Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.

On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

(a) Justifier que, dans l'intervalle $]0; \frac{1}{\sqrt{0,2}}]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $]\frac{1}{\sqrt{0,2}}; +\infty[$.

(b) Quel est le nombre de points d'intersection de \mathcal{C} et $\Gamma_{0,1}$?

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2e}$.

(a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$.

(b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes \mathcal{C} et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles \mathcal{C} et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

ANNEXE À L'EXERCICE

