

TS : exercices de bac sur la fonction ln (feuille 2)

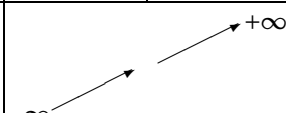
I Métropole-Réunion juin 2016

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	\emptyset	+
$f(x)$			

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0; 1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

- (a) Que fait cet algorithme?
- (b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0; 1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

En déduire la valeur de ℓ .

II Polynésie juin 2015

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n}).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.

On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n) .

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers S, v réels				
Initialisation :	Saisir la valeur de n v prend la valeur ... S prend la valeur ...				
Traitement :	Pour k variant de ... à ... faire <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">...</td><td style="padding: 2px 5px;">prend la valeur ...</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">...</td><td style="padding: 2px 5px;">prend la valeur ...</td></tr> </table> Fin Pour	...	prend la valeur	prend la valeur ...
...	prend la valeur ...				
...	prend la valeur ...				
Sortie :	Afficher S				

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n . Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1000	10000	100000	1000000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n) .

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = e^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.
2. Calculer u_2, u_3 et u_4 . Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n , puis v_n en fonction de n .
2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n . En déduire la limite de la suite (S_n) .