

Exercices de bac sur la fonction ln (feuille 1)

I Nouvelle Calédonie mars 2015

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit a un nombre réel strictement positif.

On note Δ_a la droite d'équation $y = ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a .

Pour cela, on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par

$$f_a(x) = e^x - ax.$$

On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.

1. Étude du cas particulier $a = 2$

La fonction f_2 est donc définie pour tout x réel par $f_2(x) = e^x - 2x$.

(a) Étudier les variations de la fonction f_2 sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variations sur \mathbb{R} (*on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition*).

(b) En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.

2. Étude du cas général où a est un réel strictement positif

(a) Déterminer les limites de la fonction f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Étudier les variations de la fonction f_a sur \mathbb{R} . Montrer alors que le minimum sur \mathbb{R} de la fonction f_a est $a - a \ln a$.

(c) Étudier le signe de $a - a \ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a .

(d) Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a .

II Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

- (a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.
- (b) Que permet de calculer cet algorithme ?
- (c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n .

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

- 2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.
- (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
- (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
- 3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
 - (a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
 - (b) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .
 - (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 - (d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

CORRECTION

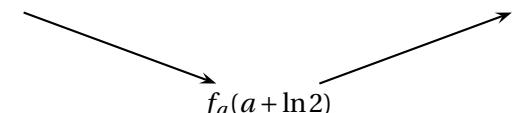
I Nouvelle Calédonie mars 2015

1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} donc dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = e^{x-a} - 2$$

$$f'_a(x) > 0 \iff e^{x-a} - 2 > 0 \iff e^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$$

$f'_a(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à $f_a(a + \ln 2) = e^{a+\ln 2-a} - 2(a + \ln 2) + e^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.

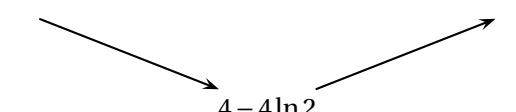
x	$-\infty$	$a + \ln 2$	$+\infty$
$f'_a(x)$	-	0	+
f_a			$f_a(a + \ln 2)$

2. En $a + \ln 2$, on a $f_a(a + \ln 2) = 2 - 2a - \ln 2 + e^a$.

Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur \mathbb{R} et définie par $\varphi(a) = 2 - 2a - \ln 2 + e^a$

$$\varphi'(a) = -2 + e^a; -2 + e^a > 0 \iff e^a > 2 \iff a > \ln 2$$

$\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
φ			$4 - 4\ln 2$

Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à $\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + e^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2$.

II Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

- (a) On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ et

$$u_3 = \sqrt{2u_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1.8340 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

- (b) Cet algorithme permet le calcul du terme de rang n .

- (c) D'après le tableau des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n , on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

2. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.

- Initialisation

On a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 2$

- Héritéité

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n \leq 2$.

On a : $0 < u_n \leq 2 \Leftrightarrow 0 < 2u_n \leq 4 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2u_n} \leq 4 \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leq 2$.

- Conclusion

$0 < u_0 \leq 2$

Si $0 < u_n \leq 2$ alors $0 < u_{n+1} \leq 2$.

D'après l'axiome de récurrence on a pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.

(b) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n) .

Comme pour tout entier naturel n , $0 < u_n$, comparons $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

$$\text{On a : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{2u_n}{u_n^2}} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}.$$

Et comme on a démontré précédemment que $u_n \leq 2$, alors $\frac{2}{u_n} \geq 1$ et $\sqrt{\frac{2}{u_n}} \geq 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $0 < u_n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$; (u_n) est une suite croissante.

(c) On vient de prouver que d'une part la suite (u_n) est strictement croissante et que d'autre part elle est majorée par 2.

Ceci démontre que la suite (u_n) est convergente.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

(a) Pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln u_n - \ln 2$ donc en particulier :

$$u_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

On a aussi pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$, mais $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

$$\text{Alors : } v_{n+1} = \ln \sqrt{2u_n} - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln 2) - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 2) = \frac{1}{2}v_n$$

On peut en conclure que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

(b) On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n , $v_n = -\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$v_n = \ln(u_n) - \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{u_n}{2}\right) = v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{2} = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = 2e^{v_n}. u_n \text{ en fonction de } n.$$

(c) Comme $\frac{1}{2} \in [0; 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x) = 1$, alors par composition des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{v_n}) = 1$ et finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 2$

(d) L'algorithme ci-dessous permet d'afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leq 1,999$ Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Affecter à n la valeur $n + 1$
Sortie :	Afficher n