Exercices de bac sur la fonction exponentielle (2)

Asie juin 2010 partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe repr ésentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites
   (a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   (c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux r ésultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Étude des variations de la fonction f
   (a) Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :
   $$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$
   (b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Polynésie septembre 2010

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x+1}$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,

Q le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.