

TS : Exercices sur la convergence monotone

I

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$
et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

1. Montrer que cette suite est majorée par 6.
2. Montrer que cette suite est croissante.
Que peut-on déduire ?
3. Conjecturer la limite de cette suite.
4. Démontrer que cette limite est la bonne après avoir prouvé que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique.

II D'après Polynésie septembre 2008

On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par :

$v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 1,4x - 0,05x^2.$$

- (a) étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.
 - (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .

III Développement décimal illimité

1. (a) Effectuer à la main la division de 106 par 33 jusqu'à la sixième décimale.

- (b) La division a-t-elle des chances de s'arrêter ?

Que peut-on en déduire pour le nombre $\frac{106}{33}$?

2. Inversement, on se demande s'il existe un nombre rationnel (quotient de deux entiers) admettant pour écriture $2,454545$ où la séquence « 45 » se répète indéfiniment.

- (a) Expliquer pourquoi x peut être considéré comme la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ où :

$$x_n = 2 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100^2} + \dots + \frac{45}{100^n}.$$

- (b) Montrer que $2 + \frac{5}{11} \left[1 - \frac{1}{100^n} \right]$.

- (c) En déduire que (x_n) tend vers un nombre rationnel x lorsque n tend vers $+\infty$.