

TS : exercices sur les nombres complexes

I Livre sesamaths

On considère trois points du plan A, B et C dont les affixes sont $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + 5i$ et enfin

$$z_C = 2(1 + \sqrt{3}) + i(3 - \sqrt{3}).$$

1. Déterminer les affixes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. En déduire que le triangle ABC est isocèle en A .
3. À l'aide d'un quotient de complexes, démontrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure $-\frac{\pi}{3}$.
4. En déduire la nature du triangle ABC .

II Livre sesamaths

On considère dans le plan complexe l'ensemble \mathcal{E} des points M_t de coordonnées

$$\begin{cases} x_{M_t} = -1 + 2 \cos(t) \\ y_{M_t} = 2 + 2 \sin(t) \end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}$, et C , le point d'affixe $z_C = -1 + 2i$.

1. Soient $t \in \mathbb{R}$ et z_t l'affixe de M_t . Calculer $|z_t - z_C|$.
En déduire que M_t se trouve sur un cercle \mathcal{C} dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit M un point de \mathcal{C} et z son affixe. On pose :
 $z' = z - z_C$.
 - (a) Déterminer $|z'|$.
 - (b) En déduire la forme trigonométrique de z' , puis les coordonnées de M .
 - (c) En déduire que $M \in \mathcal{E}$.
3. Conclure sur la nature de \mathcal{E} .

III Les entiers de Gauß

On appelle *entier de Gauß* tout nombre complexe de la forme $k + i\ell$, où k et ℓ sont des entiers relatifs.

1. Montrer que la somme et la différence de deux entiers de Gauß sont des entiers de Gauß.
2. Montrer que le produit de deux entiers de Gauß est un entier de Gauß.
3. Déterminer l'écriture algébrique de l'inverse de $2i$. L'inverse d'un entier de Gauß est-il nécessairement un entier de Gauß?

IV

On se propose dans cet exercice de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

2. En utilisant la valeur $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule précédente, démontrer que :

$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) + 1 = 0.$$

3. Démontrer que :

$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) = \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 - 2.$$

$$\text{et que : } \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

4. En déduire, en utilisant la relation trouvée à la question 2., que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation du second degré que l'on précisera, puis calculer la valeur exacte cherchée.