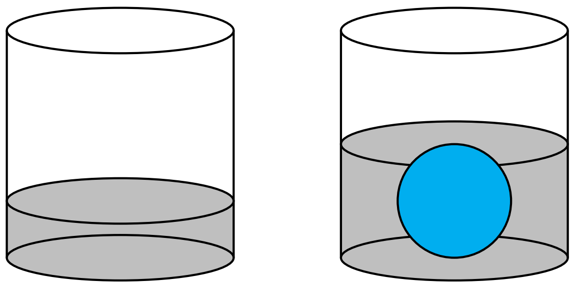
TS : feuille d'exercices sur le théorème des valeurs intermédiaires

I

Un cylindre a pour base un disque de rayon 1 dm et contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm. On plonge dans ce cylindre une bille de diamètre d (en dm). Le niveau de l'eau est alors tangent à la bille.
On se propose de calculer la valeur de d.



1. Démontrer que d vérifie $0 < d < 2$ et
$$d^3 - 6d + 3 = 0.$$
2. (a) Démontrer que l'équation $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0\,;\,2[$.
   (b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

II Avec une fonction auxiliaire

f est la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,1\}$ par
$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = x^3 - 3x - 4.$$

1. (a) Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Étudier les variations de g. Dresser son tableau de variation.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel qu $g(\alpha) = 0$.
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Étudier le signe de la fonction g.

Partie B : Étude de la fonction f

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}$,
$$f'(x) = \frac{xg(x)}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. (a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathscr{D}$,
$$f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}.$$
   (b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ.
4. Tracer la droite Δ, les aymptotes verticales à $\mathscr{C}$ puis la courbe $\mathscr{C}$.