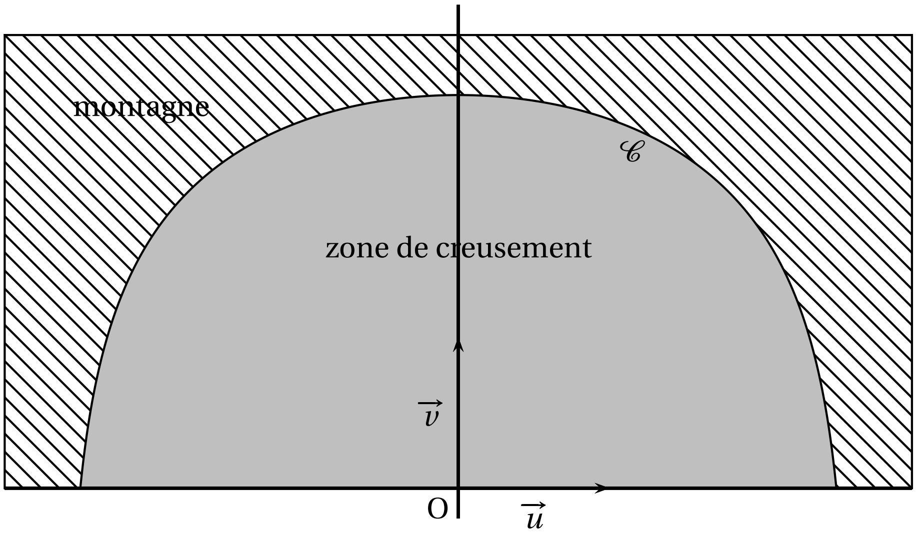
Pondichéry avril 2017

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.

Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\,;\,2,5]$ par :

$$f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f !

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5\,;\,2,5]$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5\,;\,2,5]$.
   En déduire le signe de f sur $[-2,5\,;\,2,5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre 0 ? Justifier la réponse.
2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est
   $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$, notée a.
   On admet que : $a \leqslant I \leqslant a + \dfrac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$.
   (a) Le tableau fourni ci-dessous, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.
   Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

(b) En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Variables
- R et S sont des réels
- n et k sont des entiers

Traitement
- S prend la valeur 0
- Demander la valeur de n
- Pour k variant de 1 à n faire
  - R prend la valeur $\dfrac{2,5}{n} \times f\left(\dfrac{2,5}{n} \times k\right)$
  - S prend la valeur $S + R$
- Fin Pour
- Afficher S

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-6}, obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0$, $n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	…	…
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	…
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	…	…
Affichage	$S = \dots$		