Nombres complexes : forme algébrique

Table des matières

I Ensemble des nombres complexes 3
- I.1 Nombre i . . . 3
- I.2 Forme algébrique . . . 3
- I.3 Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan . . . 3

II Opérations sur les nombres complexes 4
- II.1 Addition . . . 4
- II.2 Soustraction . . . 4
- II.3 Multiplication . . . 5
- II.4 Conjugué d'un nombre complexe . . . 5
- II.5 Inverse . . . 6
- II.6 Quotient de deux nombres complexes . . . 6

III Conjugué, module et opérations 6
- III.1 Module . . . 6
- III.2 Conjugué et opérations . . . 7
- III.3 Modules et opérations . . . 8

IV Équations du second degré 9

V Forme trigonométrique d'un nombre complexe 10
- V.1 Rappel sur les coordonnées polaires d'un point . . . 10
- V.2 Argument d'un nombre complexe . . . 10
- V.3 Forme trigonométrique . . . 10
- V.4 Propriétés : . . . 11
- V.5 Forme exponentielle des nombres complexes . . . 12

Introduction historique

En Italie, au XVI^{e} siécle, deux découvertes mathématiques vont être faites : la résolution des équations du troisiéme et du quatriéme degré et l'invention des nombres complexes. Alors que de nombreux mathématiciens n'osent pas encore utiliser les nombres négatifs, Cardan et ses élèves écrivent des symboles tels que $\sqrt{-a}$, où a est un nombre réel strictement positif; ils décrivent les règles permettant de calculer en utilisant ces nouveaux nombres appelés nombres « impossibles ».

L'équation du troisième degré $x^3 + ax = b$ (1) fut résolue à la Renaissance de la manière suivante.

Si l'on pose $x = u + v$, l'équation en x s'écrit comme une relation entre u et v :
$(u+v)^3 + a(u+v) = b$, soit $u^3 + v^3 + (3uv + a)(u+v) = b$.
Si l'on impose à uv d'être égal à $-\dfrac{a}{3}$, on aura alors à chercher u et v tels que :

$$\begin{cases} uv = -\dfrac{a}{3} \\ u^3 + v^3 = b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u^3v^3 = -\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 \\ u^3 + v^3 = b \end{cases}$$

Ainsi u^3 et v^3 ont-ils pour somme b et pour produit $-\left(\dfrac{a}{3}\right)^3$.
On les obtient donc comme solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 - bX - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0.$$

Par conséquent, si $b^2 + 4\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 > 0$, on obtient :

$$u^3 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{2} \ ; \ v^3 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{2}$$

et

$$\boxed{x = u + v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}}$$

Cette formule porte le nom de Cardan, qui la publia en 1545.

1. Si $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{3}\right)^3$ est positif, on démontre que l'équation (1) n'admet qu'une racine réelle, donnée par la formule (2).
2. Si $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 < 0$, la formule de Cardan n'a plus de sens. (car elle contient la racine carrée d 'un nombre négatif.
   Cependant, on peut démontrer que, dans ce cas, l'équation (1) admet trois racines dans $\mathbb{R}$. (en étudiant la fonction $x \mapsto x^3 + ax - b$).
   Le mathématicien Bombelli étudia l'exemple de l'équation : $x^3 - 15x = 4$ (donc $a = -15$; $b = 4$).
   La formule de Cardan s'écrit ici :

   $$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 5^4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 5^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

   Bombelli eut l'audace de traiter ces expressions en utilisant les règles de calcul ordinaire.
   Par exemple, si l'on remarque que :

   $$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

et que, de même $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3=2-\sqrt{-121}$,on obtient bien une solution de l'équation initiale en écrivant alors :

$$x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4.$$

Ceci mettait en évidence dés 1572 que des quantités réelles pouvaient être représentées par des nombres en apparence « impossibles ».
Bombelli alla jusqu'à considérer l'ensemble des combinaisons linéaires de 1, - 1. $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ à coefficients positifs et définit des opérations qui sont celles que nous utilisons aujourd'hui, en posant $i=\sqrt{-1}$, (notation du mathématicien suisse Euler, XVIIIe siécle).
Dés 1629, Girard pensa que toute équation de degré n admettait n racines, ce qui laisse supposer que l'ensemble des nombres complexes est un cadre adéquat à la résolution des équations. Gauss ne donna la démonstration de cette conjecture qu'un siècle plus tard (1799).
¿ la fin du XVIIIe siècle, les nombres complexes sont fréquemment utilisés, mais leur statut mathématique ne sera clarifié qu'au XlXe siècle par Gauss, puis par Cauchy.

I Ensemble des nombres complexes

Remarque : la notation $\sqrt{-1}$ n'est pas possible, car on devrait avoir $\sqrt{-1}^2=-1$ et $\sqrt{-1}^2=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1$.

I.1 Nombre i

Définition

On admet qu'il existe un nombre imaginaire (non réel) défini par $\mathrm{i}^2=-1$.
L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres $z=a+\mathrm{i}b$, avec a et b réels.

I.2 Forme algébrique

Vocabulaire et définitions :

- L'écriture $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels est appelée forme algébrique du nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$.
- Dans ce cas, x est appelé la partie réelle de z et notée $\mathrm{Re}(z)$ et y la partie imaginaire de z et notée $\mathrm{Im}(z)$.
- z est réel si, et seulement si, $y=\mathrm{Im}(z)=0$
- z est imaginaire pur si, et seulement si, $x=\mathrm{Re}(z)=0$

I.3 Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan

Définition

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repére orthonormal $(0;\vec{u};\vec{v})$. À chaque nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$, on associe de maniére unique le point $M(x\ ;\ y)$ et réciproquement, à chaque point $M(x\ ;\ y)$ correspond un unique nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$.
Ce nombre est appelé affixe de z (affixe est un mot féminin)

Remarques :

Tous les points de l'axe des abscisses $(O;\overrightarrow{u})$ ont une affixe z dite réelle car $Im(z)=0$.
Tous les points de l'axe des ordonnées $(O;\overrightarrow{v})$ ont une affixe z dite imaginaire pure car $Re(z)=0$.
Le point O a pour affixe 0 qui est à la fois réel et imaginaire pur.
Lorsque l'on associe les nombres complexes aux points d'un plan du repére orthonormal direct $(0;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$, on dit que l'on travaille dans le **plan complexe**.

Exemples :

1. Représenter le point A d'affixe $-3-i$.
2. Représenter le point B d'affixe 2.
3. Représenter le point C d'affixe $3i$.
4. Soit G le point d'affixe $3+2i$. Soit E le point tel que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OG}$.Quelle est l'affixe de $\overrightarrow{CE}$?
5. Que remarque-t-on sur les affixes de deux points symétriques par rapport à O?
6. Que remarque-t-on sur les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe $(O;\overrightarrow{u})$?
7. Que remarque-t-on sur les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe $(O;\overrightarrow{v})$?

Définition :

Deux nombres complexes sont dits égaux s'ils représentent le même point, c'est-à-dire s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
$x+iy=x'+iy' \Leftrightarrow x=x' \text{et} y=y'$.

Remarque : un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes les deux nulles.

II Opérations sur les nombres complexes

Soient $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$ seux nombres complexes, x, y, x' et y' réels

II.1 Addition

$$\boxed{z+z'=(x+\mathrm{i}y)+(x'+\mathrm{i}y')=x+x'+i(y+y')}$$

Exemple : $(2+3\mathrm{i})+(5+7\mathrm{i})=2+5+3\mathrm{i}+7\mathrm{i}=\boxed{7+10\mathrm{i}}$

II.2 Soustraction

$$\boxed{z-z'=(x+\mathrm{i}y)-(x'+\mathrm{i}y')=x-x'+i(y-y')}$$

II.3 Multiplication

$$\boxed{zz' = (x+\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y') = xx' - yy' + \mathrm{i}(xy'+x'y)}$$

En effet : $(x+\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y') = xx' + x\mathrm{i}y' + \mathrm{i}y'x + \mathrm{i}^2yy' = xx' - yy' + \mathrm{i}(xy'+x'y)$ (car $\mathrm{i}^2 = -1$)

Exemple : Soient $z = 2+3\mathrm{i}$ et $z' = 7+2\mathrm{i}$.
Alors $zz' = (2+3\mathrm{i})(7+2\mathrm{i}) = 2\times7 + 3\times2\mathrm{i} + 3\mathrm{i}\times7 + 3\mathrm{i}\times2\mathrm{i} = 14+4\mathrm{i}+21\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 14+25\mathrm{i}-6 = 14-6+25\mathrm{i} = \boxed{8+25\mathrm{i}}$ (car $\mathrm{i}^2 = -1$).

II.4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

On appelle conjugué de z et on le note $\overline{z}$ le nombre défini par : $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

Exemples : $\overline{2+3\mathrm{i}} = 2-3\mathrm{i}$; $\overline{5-7\mathrm{i}} = 5+7\mathrm{i}$

Propriété

- Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
- $z\in\mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
- $M(z)$ et $M'\left(\overline{z}\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels
- Si $z = x+\mathrm{i}y$, $z\overline{z} = x^2+y^2$ (carré de partie réelle plus carré de la partie imaginaire)

Démonstration :

- La double conjugaison revient à effectuer deux fois de suite une symétrie par rapport à l'axe des réels, donc à ne rien changer.
- Pour démontrer une équivalence, on démontre les deux implications.
  (a) On suppose z réel, donc $z = x+\mathrm{i}\times0$ avec $x\in\mathbb{R}$.
  Alors : $\overline{z} = \overline{x+0\times\mathrm{i}} = x - 0\times\mathrm{i} = x = z$ donc $z = \overline{z}$.
  (b) Réciproquement : on suppose que $z = \overline{z}$ avec $z = x+\mathrm{i}y$, $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$.
  Alors : $\overline{z} = x-\mathrm{i}y$ donc : $z = \overline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, donc $z = x\in\mathbb{R}$.
- De même, si $z\in\mathrm{i}\mathbb{R}$, $z = \mathrm{i}y$, avec $y\in\mathbb{R}$, donc $\overline{z} = -\mathrm{i}y = -z$.

Réciproquement : $z = x+\mathrm{i}y$; si $\overline{z} = -z$, alors $\begin{cases} x = -x \\ y = y \end{cases} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z\in\mathrm{i}\mathbb{R}$

- $M(z)$ et $M'\left(\overline{z}\right)$ ont même abscisse et des ordonnées opposées, donc ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- $z\overline{z} = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2-(\mathrm{i}y)^2 = x^2-\mathrm{i}^2y^2 = \boxed{x^2+y^2}$

II.5 Inverse

$$\boxed{\text{Si } z \neq 0,\ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}.}$$

En effet : $\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)} = \dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2-(iy)^2} = \dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$.

Remarques : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = \overline{z}z = x^2+y^2 \in \mathbb{R}$.
On ne laisse pas de nombre complexe au dénominateur d'une fraction.

Exemple : : $z = 2+3\mathrm{i}$; $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$;
$\overline{z} = \overline{2+3\mathrm{i}}$; $z\overline{z} = 2^2+3^2 = 13$.
Par conséquent : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{13} = \boxed{\dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}\mathrm{i}}$.

II.6 Quotient de deux nombres complexes

$$\boxed{\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} \text{ et on applique la méthode précédente d'où : } \frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z\overline{z'}}}$$

Exemple : $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{5+7\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\mathrm{i})(5-7\mathrm{i})}{5^2+7^2} = \dfrac{10-14\mathrm{i}+15\mathrm{i}-21\mathrm{i})2}{74} = \dfrac{10+21+\mathrm{i}}{74} = \dfrac{31+\mathrm{i}}{74} = \boxed{\dfrac{31}{74} + \dfrac{1}{74}\mathrm{i}}$

III Conjugué, module et opérations

III.1 Module

Soit M(z) un point d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ dans le plan complexe muni d'un repére orthonormal $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

Définition :

On appelle module de z, noté $|z|$ la distance OM.
$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

En effet : $OM = \sqrt{x^2+y^2}$; or $x^2+y^2 = z\overline{z}$.

III.2 Conjugué et opérations

Propriétés :

Soient deux nombres complexes z et z'.

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

c) $\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

d) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

f) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

g) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Démonstrations :

Ces propriétés se démontrent trés simplement, de façon calculatoire.

a) « évident »

b) $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$. $\overline{z+z'} = \overline{(x+x') + \mathrm{i}(y+y')} = (x+x') - \mathrm{i}(y+y') = (x - \mathrm{i}y) + (x' - \mathrm{i}y') = \overline{z} + \overline{z'}$

c) idem

d) $zz' = x^2 - y^2 + \mathrm{i}(xy' + x'y)$ donc $\overline{zz'} = x^2 - y^2 - \mathrm{i}(xy' + x'y)$
$\overline{z}\,\overline{z'} = (x - \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y') = xx' - \mathrm{i}xy' - \mathrm{i}x'y - yy' = x^2 - y^2 - \mathrm{i}(xy' + x'y)$
On a bien $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.

e) Se démontre par récurrence :

- $n = 1$: $\overline{z^1} = \overline{z} = \overline{z}^1$
- Hérédité : on suppose que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour un entier n quelconque.
  Alors : $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$

f) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$ donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{x + \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$

Or : $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{x - \mathrm{i}y} = \dfrac{\overline{x - \mathrm{i}y}}{(x - \mathrm{i}y)(x + \mathrm{i}y)} = \dfrac{x + \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$.

On a bien : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

Autre démonstration : $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ donc $\overline{z \times \dfrac{1}{z}} = \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1$ d'où $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

g) évident en utilisant 4. et 5.
$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Théoréme :

Soit z un nombre complexe.

1. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
2. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Démonstration :

1. • Supposons z réel. Alors $z = x + \mathrm{i}0$, $x \in \mathbb{R}$ $\overline{z} = x - \mathrm{i}0 = x = z$ donc $z = \overline{z}$.
   • $z = \overline{z} \Leftrightarrow x + \mathrm{i}y = x - \mathrm{i}y \Leftrightarrow 2\mathrm{i}y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \in \mathbb{R}$.
2. • Supposons z imaginaire pur : $z = \mathrm{i}y$, $y \in \mathbb{R}$. Alors $\overline{z} = -\mathrm{i}y = -z$ donc $z = -\overline{z}$.
   • $z = -\overline{z} \Leftrightarrow x + \mathrm{i}y = -(x - \mathrm{i}y) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow zz \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

III.3 Modules et opérations

Théoréme

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

a) Si $z = x + iy$ avec x et y réels, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$

c) $|zz'| = |z| \times |z'|$

d) $\left|z^n\right| = |z|^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

e) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$

f) Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

g) Inégalité triangulaire ; $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (mais on n'a pas égalité en général)

Les démonstrations sont simples : Soit M le point d'affixe z

a) $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) $|z| = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow M = 0 \Leftrightarrow z = 0$

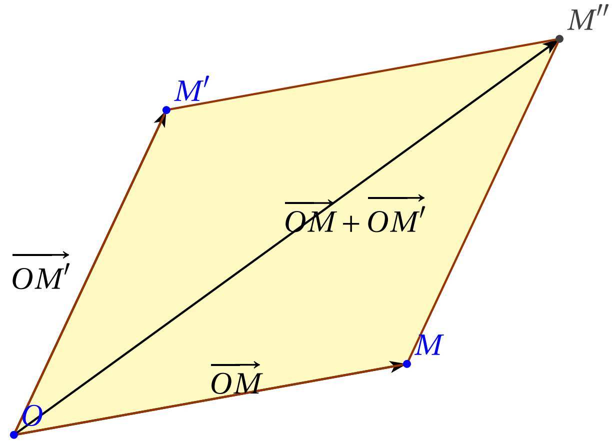
c) $|zz'|^2 = |xx' - yy' + \mathrm{i}(xy' + x'y)|^2 = (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2 = x^2x'^2 + 2xyx'y' + y^2y'2 + x^2y'^2 - 2xyx'y' + x'^2y^2 = x^2x'^2 + x^2y'^2 + x'^2y^2 + y^2y'^2$
$\left(|z||z'|\right)^2 = |z|^2|z'|^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = x^2x'^2 + x^2y'^2 + x'^2y^2 + y^2y'^2$.
Les deux expressions ont des carrés égaux et ce sont des nombres positifs, donc elles sont égales.

d) Elle se démontre par récurrence .

e) $\left|\dfrac{1}{z}\right|^2 = \left|\dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}\right| = \dfrac{x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{1}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{|z|^2} = \left(\dfrac{1}{|z|}\right)^2$.
Les deux expressions sont positives et ont le même carré, donc elles sont égales.

f) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$ en appliquant la propriété précédente sur le module d'un produit et de l'inverse d'un nombre.

g) Démonstration géométrique



Soient M et M' les points d'affixes respectives z et z'.
$z+z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM''}$, où M'' est le quatriéme point du parallélogramme, formé sur les deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$.
Alors : $|z+z'|=OM''\leqslant OM+MM'=|z|+|z'|$ (car $\overrightarrow{MM''}=\overrightarrow{OM'}$ donc $MM'=|z'|$)

IV Équations du second degré

On considére l'équation $az^2+bz+c=0$, avec a, b et c réels.

En utilisant la forme canonique, cette équation s'écrit : $\boxed{a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]=0}$, où $\Delta=b^2-4ac$.

On a trois cas possibles :

- $\boxed{\text{Premier cas; } \Delta>0}$

  On remarque que $\dfrac{\Delta}{4a^2}=\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$; on obtient une identité remarquable, on factorise et on trouve (situation vue en Premiére) deux solutions **réelles** ; $\boxed{z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

- $\boxed{\text{Deuxiéme cas : } \Delta=0}$

  On retrouve de même qu'il y a une solution réelle double : $\boxed{z=-\dfrac{b}{2a}}$.

- $\boxed{\text{Troisiéme cas : } \Delta<0}$

  Alors $\Delta=-(-\Delta)=\mathrm{i}^2\times(-\Delta)=\left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$ car $\Delta>0$;
  on a alors $\left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2=\mathrm{i}^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2=(-1)\times(-\Delta)=\Delta$.
  Par conséquent :
  $$a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]=a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$
  $$=a\left(z-\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).$$

Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

On obtient **deux solutions complexes conjuguées** : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$/

Résumé

Solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $(a\,;\,b\,;\,c) \in \mathbb{R}^3$:

- Si $\Delta > 0$, on a deux solutions **réelles** : $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution **réelle double** : $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, on a deux solutions **complexes conjuguées** : $z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

V Forme trigonométrique d'un nombre complexe

V.1 Rappel sur les coordonnées polaires d'un point

Soit $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ un repére orthonormal du plan complexe.
On note $[\rho\,;\,\theta]$ les coordonnés polaires d'un point; $\rho = OM$ et $\theta = \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$ (angle orienté, défini à $2k\pi$ prés).
Les coordonnées cartésiennes de M sont alors $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

V.2 Argument d'un nombre complexe

Définition :

Dans le plan complexe muni du repére orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on appelle argument de $z \neq 0$, noté $\arg(z)$ **toute** mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est le point d'affixe z.

Remarques :

- Un nombre complexe a une infinité d'arguments, différents tous entre eux d'un multiple de 2π. Autrement dit : $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ si θ est un des arguments.
- 0 n'a pas d'argument.

V.3 Forme trigonométrique

L'affixe de z est alors : $z = \rho\cos\theta + \mathrm{i}\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

On a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Définition :

La forme trigonométrique de z est : $\boxed{z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}$

Remarque : la forme trigonométrique d'un nombre complexe est unique.

V.4 Propriétés :

a) Conjugué et opposé :

Propriété

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

Démonstration : évident géométriquement, car les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Multiplier l'affixe $z \neq 0$ d'un point revient à faire subir à ce point une symétrie de centre O; l'argument augmente de $\pi\ [2\pi]$.

b) Propriétés algébriques :

Si z et z' sont des nombres complexes non nuls, alors :

1. $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ [\pi]$
2. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
3. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
4. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
5. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, \arg\left(z^n\right) = n\arg(z)$

Démonstration :

1. évident géométriquement : si $z \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arg(z) = 0\ [2\pi]$ et si $z \in \mathbb{R}^{-*}$, $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$ d'où le résultat.
   La réciproque est évidente.
2. facile (même méthode qu'au 1.)
3. Soient $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$ écrits sous leurs formes trigonométriques.
   Alors : $zz' = rr'(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') = rr'(\cos\theta\cos\theta' + \mathrm{i}\cos\theta\sin\theta' + \mathrm{i}\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\cos\theta') =$

$rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')) = rr'(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta'))$.
Donc $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

4. Soit $z = r(cos\theta + i\sin\theta)$ avec $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$.
$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}}{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = \dfrac{r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)}{r^2} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$ d'où $arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.
5. $\dfrac{z'}{z} = z' \times \dfrac{1}{z}$ et on utilise les propriétés précédentes.
6. démonstration par récurrence (facile à faire)

Propriété :

Soient trois points distincts A, B, C :

- $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \dfrac{AC}{AB}$
- $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Exemple d'utilisation : (**à savoir faire parfaitement**)

Soient les points A, B et C d'affixes $z_A = 5+2i$, $z_B = 2+3i$, $z_C = 4-i$.
Que peut-on dire du triangle ABC?
$\dfrac{AC}{AB} = \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\dfrac{-1-3i}{-3-i}\right| = |i| = 1$ donc AC=AB et le triangle ABC est isocéle.
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ et le triangle est rectangle en A.
ABC est donc un triangle rectangle isocéle.

V.5 Forme exponentielle des nombres complexes

Définition :

Pour tout nombre réel θ, on pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
Si z est un nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ, on appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = \rho e^{i\theta}$.

Remarque :

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. On a : $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$. La fonction f vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle, ce qui est une première justification de cette écriture sous forme exponentielle.

Propriété :

Soient $\rho e^{i\theta}$ et $\rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls, notés respectivement z et z'.

1. $zz' = \rho e^{i\theta} \times \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$
3. $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{\rho' e^{i\theta'}}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta'-\theta)}$
4. $z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$
5. $\overline{z} = \overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$

La démonstration repose sur les calculs faits avec la notation trigonométrique.

Remarque : La formule qu'admitait Euler au oint de la faire graver sur sa tombe est

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Remarque :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$