Correction de la feuille d'exercices

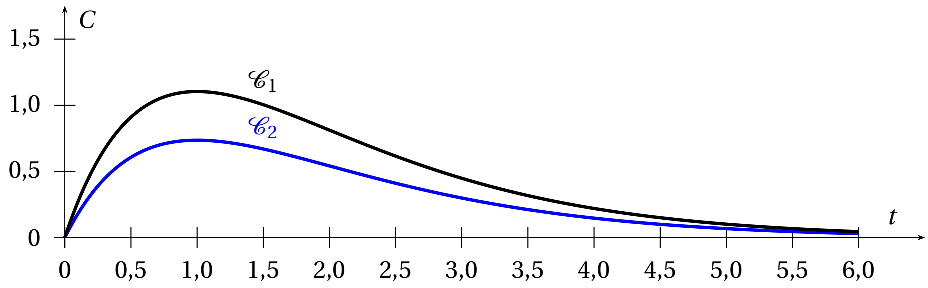
I Polynésie juin 2016

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
   À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?
   La vitesse est visiblement maximale pour $t = 0$ car c'est la tangente aux courbes en $O(0\ ;\ 0)$ qui semble avoir le coefficient directeur le plus élevé parmi toutes les tangentes.
   On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.
2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.
   La courbe $\mathscr{C}_1$ montre que le taux d'alcoolémie de P_1 admet un maximum plus élevé que pour P_2.
   On en déduit que la personne la moins corpulente est P_1
3. Une personne à jeûn absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
   $$f(t) = At\mathrm{e}^{-t}$$
   où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.
   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.
   première méthode (longue mais utilisable dans la partie B) :
   f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   $f = uv \Longrightarrow f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(t) = At \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = A \\ v'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$
   $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[\ ,\ f'(t) = A(1-t)\mathrm{e}^{-t}$ et $f'(0) = A$

   deuxième méthode (peut-être un peu plus astucieuse) :
   $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} A\mathrm{e}^{-h} = A$ (limite finie)
   On en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = A$
   (b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »
   L'affirmation est FAUSSE
   si $A_1 > A_2$ alors $A_1 t\mathrm{e}^{-t} > A_2 t\mathrm{e}^{-t}$ car $t\mathrm{e}^{-t} > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$
   On en déduit que la courbe associée à A_1 est au dessus de celle associée à A_2 donc la personne associée à A_1 est de plus faible corpulence que la personne associée à A_2

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   On a vu dans la partie précédente que $\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = A(1-t)\mathrm{e}^{-t}$ or $A\mathrm{e}^{-t} > 0$
   donc $f'(t)$ est du signe de $1-t$, on peut donc déterminer les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
   La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1h après l'absorption.
   Elle est alors d'environ 0,74 $g.l^{-1}$
3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to=\infty} 2\times\frac{t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to+\infty} +\infty \left(2\times\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t}\right)} = 0\right)$ par quotient
   On en déduit que l'alcool finit par s'éliminer totalement.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.
   (a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que
   $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.
   f est continue et strictement croissante sur $[0\,,\,1]$ à valeurs dans $\left[0\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$
   or $0,2 \in \left[0\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,
   l'équation $f(t) = 0,2$ admet une unique solution t_1 sur $[0\,,\,1]$.
   de même, f est continue et strictement décroissante sur $[1\,,\,+\infty[$ à valeurs dans $\left]0\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$
   or $0,2 \in \left]0\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,
   l'équation $f(t) = 0,2$ admet une unique solution t_2 sur $[1\,,\,+\infty[$.
   (b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
   Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.
   Par balayage, on obtient $t_1 \approx 0,112$ et $t_2 \approx 3,577$
   donc Paul doit attendre au minimum 3 heures et 35 minutes avant de reprendre le volant.
5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à
   5×10^{-3} g.L^{-1}.
   (a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.
   On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > T$, $f(t) \in\ ]-\epsilon\,;\,\epsilon[$
   ici on pose $\epsilon = 5\times10^{-3}$
   Donc il existe un instant T à partir duquel l'alcool n'est plus détectable dans le sang.
   (b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par
   $f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur $3,5$
	p prend la valeur $0,25$
	C prend la valeur $0,21$
Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?
La valeur affichée par l'algorithme est le temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.

Si on poursuit l'algorithme jusqu'à son terme, on obtient $8,25$ à l'affichage donc il faut 8 h et 15 minutes pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang

II Centres étrangers juin 2015

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

(a) g est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 1 = \left(2\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 - \mathrm{e}^{x} - 1\right) = 2X^2 - X - 1$ en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.
$2X^2 - X - 1$ a pour racines 1 et $-\dfrac{1}{2}$ donc $2X^2 - X - 1 = 2(X-1)\left(X + \dfrac{1}{2}\right) = (X-1)(2X+1)$.
On en déduit : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right)$

(b) Pour tout x réel, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $2\mathrm{e}^{x} + 1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.
$\mathrm{e}^{x-1} = 0$ pour $x = 0$ et $\mathrm{e}^{x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{x} > 1 \iff x > 0$.
On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

g a donc pour minimum 0, atteint pour $x = 0$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \left(\mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}\right) - u_n = g(u_n) \geqslant 0$ puisque le minimum de g est 0.
On en déduit que la suite (u_n) est **croissante**.

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

(a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

— **Initialisation :** $u_0 = a \leqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

— **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $u_n \leqslant 0$.
On a : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{u_n} \leqslant 1$ d'où
$\mathrm{e}^{u_n} - 1 \leqslant 0$.
Comme $\mathrm{e}^{u_n} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} \leqslant 0$.
La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

(b) La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 0, donc convergente vers une réel $\ell \geqslant 0$.

(c) On suppose que $a = 0$. Le premier terme de la suite vaut 0. La suite est croissante et majorée par 0, donc tous les termes de la suite valent 0 et la suite **converge vers 0**.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

Comme $u_n \geqslant a > 0$, tous les termes de la suite sont positifs. D'après les variations de g sur $[0\,;\, = \infty[$, on a $g(u_n) \geqslant g(a)$ donc $\boxed{u_{n+1} — u_n \geqslant g(a)}$.

(b) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

— **Initialisation** : Pour $n = 0$, $a + n \times g(a) = a + 0 \times g(a) = a$; or $u_n \geqslant a$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$. La propriété est initialisée.

— **Hérédité** : on suppose que, pour un entier n quelconque,
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.
Alors : $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \iff u_{n+1} = u_n + g(u_n)$
$\geqslant \big(a + n \times g(a))\big) + g(u_n)$ (d'après l'hypothèse de récurrence).
Or $u_n \geqslant a > 0$ donc $g(u_n) \geqslant g(a)$ puisque la fonction g est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
Par conséquent $\geqslant \big(a + n \times g(a))\big) + g(u_n) \geqslant a + n \times g(a) + g(a)$
$= a + (n+1)g(a)$.
La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} \geqslant a + n \times g(a)}$.

(c) $a > 0$ donc $g(a) > g(0) = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \big(a + n \times g(a)\big) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \boxed{+\infty}$ d'après le théorème des gendarmes.

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

D'après la question précédente, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

(a) La partie à compléter de l'algorithme est :

Tant que $u \leqslant M$
u prend la valeur $\mathrm{e}^u\left(\mathrm{e}^u - 1\right)$
n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que

(b) Pour $M = 60$, on trouve $\boxed{n = 36}$