Exercices de révisions sur les suites

I

On considère la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}.$$
Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Première méthode : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$.

f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{2\times 2x\left(x^2+5\right)-2x\left(2x^2+1\right)}{\left(x^2+5\right)^2} = \cdots = \dfrac{18x}{\left(x^2+5\right)^2} \geqslant 0$ sur $[0+\infty[$.

f est croissante sur cet intervalle, donc la suite qui est une restriction de f à $\mathbb{N}$ est aussi **croissante**.

Deuxième méthode : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \cdots = \dfrac{18n+9}{\left(n^2+5\right)\left((n+1)^2+5\right)} \geqslant 0$ donc la suite est **croissante**.

II

On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}.$$
Montrer que (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1)}-u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2)} > 0$ donc la suite est **croissante**.

III

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

1. $u_n = n^2+4n+3$

   On peut étudier le sens de variation de la fonction associée ou la différence de deux termes consécutifs.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n == 4 > 0$ donc la suite est **croissante**.

2. $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$

   Premère méthode :$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1)}-u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^n}{n+1} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)-2^n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2^n\,[2(n+1)-(n+2)]}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n2^n}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0$ donc la suite est **croissante**.

   Deuxième méthode : Il est clair que tous les termes de la suite sont positifs. On compare alors le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1 = \dfrac{\frac{2^{n+1}}{n+2}}{\frac{2^n}{n+1}}-1 = \dfrac{2(n+1)}{n+2}-1 = \dfrac{n}{n+1} \geqslant 0$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; la suite est **croissante**.

3. $u_n = \dfrac{1-n^2}{n+2}$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n == \cdots = \dfrac{-n^2-5n-3}{(n+2)(n+3)} < 0$ (car le numérateur est la somme de nombres négatifs et le dénominateur le produit de nombres positifs).
   La suite est **décroissante**.

4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n+1} < 0$ donc la suite est **décroissante**.

IV

On admet que les suites suivantes de terme général u_n ont une limite quand n tend vers $= \infty$; calculer leurs limites.

1. $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}$

   On a une forme indéterminée; pour $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3-\frac{5}{n}\right)} = \dfrac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{5}}$.

2. $u_n = \dfrac{-4n^2+3n+3}{n^2-n+4}$

   On a une forme indéterminée; pour $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{n^2\left(-4+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{-4+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4}$

3. $u_n = 2n - \sqrt{4n^2-3n+1}$

   On a une forme indéterminée; on utilise la quantité conjuguée.

   $u_n = \dfrac{\left[2n-\sqrt{4n^2-3n+1}\right]\left[2n+\sqrt{4n^2-3n+1}\right]}{\left[2n+\sqrt{4n^2-3n+1}\right]} = \dfrac{4n^2-\left(4n^2-3n+1\right)}{\left[2n+\sqrt{4n^2-3n+1}\right]} = \dfrac{3n-1}{2n+\sqrt{4n^2-3n+1}}$

   $= \dfrac{3n-1}{2n+\sqrt{4n^2\left(1-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)}} = \dfrac{3n-1}{2n+2n\sqrt{1-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}}} = \dfrac{n\left[3-\frac{1}{n}\right]}{2n\left[1+\left(1-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)\right]} = \dfrac{3-\frac{1}{n}}{2\left[1+\left(1-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)\right]}$.

   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{4}}$.

4. $u_n = \dfrac{4^n-3^n}{4^n+2^n}$

   On a une forme indéterminée.

   $u_n = \dfrac{4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{4^n\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} = \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

   $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{4}$ sont strictement compris entre -1 et 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

V

Soit $a \in [-1\ ;\ +\infty[$. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice long!

Pour montrer la monotonie de la suite par récurrence, il faut d'abord conjecturer si la suite est croissante ou décroissante.

Pour cela, on va comparer les premiers termes, en particulier on va comparer u_0 et u_1.

$u_0 = a$ et $u_1 = \sqrt{1+a}$.

On a un premier problème, c'est que u_0 et u_1 dépendent de a que l'on ne connait pas, on sait juste que $a \in [-1\ ;\ +-1[$.

On va regarder ce qu'il se passe pour certaines valeurs de a :

- si $a=-1$ alors $u_0=-1$ et $u_1=\sqrt{0}=0$ ainsi $u0<u1$;
- si $a=0$ alors $u_0=0$ et $u_1=\sqrt{1}=1$ ainsi $u_0<u_1$;
- si $a=3$ alors $u_0=3$ et $u_1=\sqrt{4}=2$ ainsi $u_0>u_1$;
- si $a=8$ alors $u_0=8$ et $u_1=\sqrt{9}=3$ ainsi $u_0>u_1$.

On remarque que l'ordre de u_0 et u_1 dépend de la valeur de a.
On va donc chercher les conditions sur a pour que $u_0>u_1$ c'est-à-dire $a>\sqrt{1+a}$.

Résolvons dans $[-1\,;\,+\infty[$ l'inéquation : $a>\sqrt{1+a}$.

$$a>\sqrt{1+a}(\geqslant 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a2>1+a \\ a\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a-1>0 \\ a\geqslant 0 \end{cases}.$$

(la première équivalence vient de la stricte croissance des fonctions « carré » et « racine carrée » sur $[0\,;\,+\infty[$).

On va donc étudier le polynôme du second degré a^2-a-1 , et en particulier étudier son signe.
$\Delta=5=\sqrt{5}^2>0$: il y a deux racines
Ainsi $a_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ et $-1<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $a_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>0$

On obtient le tableau de signes suivant :

a	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
a^2-a-1		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	

Résumé : $\begin{cases} \text{Si } -1\leqslant a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ alors } u_0<u_1 \\ \text{Si } a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ alors } u_0=u_1 \\ \text{Si } a>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ alors } u_0>u_1 \end{cases}$

On émet alors les conjectures suivantes :

- **Conjecture 1**. si $-1\leqslant a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ alors (u_n) est strictement croissante
- **Conjecture 2**. si $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ alors (u_n) est constante;
- **Conjecture 3**. si $a>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Preuve 1.
Soit $a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que (u_n) est strictement croissante. Pour $\in\mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $u_n<u_{n+1}$
Initialisation : d'après le travail précédent $u_0<u_1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un entier n donc $u_n<u_{n+1}$.
Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie , c'est-à-dire $u_{n+1}<u_{n+2}$.
Or : $u_n<u_{n+1}\Rightarrow 1+u_n<1+u_{n+1}\Rightarrow\sqrt{1+u_n}<\sqrt{1+u_{n+1}}$ (car la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$).
Conclusion : On a montré par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n<u_{n+1}$. Ainsi (u_n) est strictement croissante.

Preuve 2 : Soit $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que (u_n) est constante.

Démonstration par récurrence évidente.

Preuve 3 : Soit $a > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que (u_n) est strictement décroissante.
Démonstration par récurrence (analogue à la preuve 1, avec $>$ à la place de $<$)

VI

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n , $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. $\boxed{u_1 = 3}$ et $\boxed{u_2 = \dfrac{7}{3}}$.
2. Démontrons par récurence que, pour tout entier n , $u_n \geqslant 2$.
   - Initialisation : $u_0 = 5 \geqslant 2$ donc c'est vrai pour $n = 0$.
   - Hérédité : on suppose que $u_n \geqslant 2$ pour un entier n.
     Alors $u_n + 4 \geqslant 6$ d'où $\dfrac{u_n+4}{3} \geqslant \dfrac{6}{3} = 2$ donc $u_{n+1} \geqslant 2$ c.q.f.d
     La propriété est donc héréditaire

   Pour tout n, $\boxed{u_n \geqslant 2}$.
3. Montrons par récurrence que pour tout n, $u_{n+2} < u_{n+1}$.
   - **Initialisation** : on a déjà montré que $u_1 = \dfrac{7}{2} < 5 = u_0$.
   - **Hérédité** : on suppose que $u_{n+1} < u_n$; alors $u_{n+1} + 4 < u_n + 4$ donc $\dfrac{u_{n+1}+4}{3} < \dfrac{u_n+4}{3}$, c'est-à-dire $u_{n+2} < u_{n+1}$.
     La propriété est donc héréditaire.

   La suite est donc **décroissante**.
4. On a montré que la suite était minorée par 2 et décroissante ; elle est donc **convergente** vers une limite $\ell \geqslant 2$.
5. On pose, pour tout entier n , $v_n = u_n - 2$.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n+4}{3} - 2 = \dfrac{u_n+4-6}{3} = \dfrac{u_n-2}{3} = \dfrac{1}{3}v_n$.
   La suite (v_n) est géométrique, de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$.

   (b) On en déduit $\boxed{v_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

   Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et
   $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   (a) S_n est la **somme** des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique :
   $S_n = v_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 3 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = 3 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \boxed{\dfrac{9}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)}$.

   Pour tout n, $v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2$ donc $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = S_n + 2(n+1) = \boxed{\dfrac{9}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) + 2(n+1)}$.

   (b) $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.
   On en déduit $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{9}{2}}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty}$.

VII

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2+2n)}{(n+1)^2} = \dfrac{\left[n^2+2n+1\right]-1}{(n+1)^2} = \dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc $u_n < 1$.

   De même, $n+1 > 1$, donc $(n+1)^2 > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{(n+1)^2} > 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$.

   On a montré que $0 < u_n < 1$.

   (c) Il est clair que (u_n) est croissante.

2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$.

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

   - Initialisation :
     Pour $n=1$, $x_1 = u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{n+2}{2(n+1)} = \dfrac{3}{4}$ dond la propriété st vraie pour $n=1$.
   - Hérédité : on suppoe la propriété vraie pour un rang n qulconque, donc $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.
     Alors : $x_{n+1} = x_n \times u_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)} \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+3}{2(n+2)}$ après simplification.
     La propriété est héréditaire.

   D'après 'axiome de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En factorisant par n au numérateur et au dénominateur, on trouve $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.