Correction de la feuille 3

1 Polynésie juin 2014

Soient \( f \) et \( g \) les fonctions définies sur \( \mathbb{R} \) par
\[
f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^x - 1
\]
On note \( \mathcal{C}_f \) et \( \mathcal{C}_g \) les courbes représentatives des fonctions \( f \) et \( g \) dans un repère orthogonal.

1. Intersection de deux courbes :
\[
M(x ; y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \iff f(x) = g(x) \iff e^x = 2e^x - 1 \iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2 = 0 \end{cases} \iff e^x = 1 \iff x = 0
\]
Ainsi \( M \) a pour coordonnées (0 ; 1).

\[
f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1 \quad ; \quad g'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad g'(0) = 1
\]
En \( M \), leurs tangentes ont, toutes deux le même coefficient directeur 1, elles ont donc **mêmes tangentes** \( \Delta \) d’équation \( y - 1 = 1(x - 0) \iff y = x + 1 \).

2. Étude de la position relative de la courbe \( \mathcal{C}_g \) et de la droite \( \Delta \)
Soit \( h \) la fonction définie sur \( \mathbb{R} \) par \( h(x) = 2e^x - x - 2 \).

(a) Limite de la fonction \( h \) en \( -\infty \) :
\[
\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0
\]
(b) Pour tout réel \( x \neq 0 \)
\[
x \left( \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right) = x \cdot e^x \times \frac{2}{x} - x - x^{2} = 2e^x - x - 2 = h(x)
\]
Limite de la fonction \( h \) en \( +\infty \) :
\[
\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{2}{x} = +\infty, \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} 2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty
\]
(croissances comparées)

(c) Fonction dérivée de la fonction \( h \) sur \( \mathbb{R} \) :
\[
h'(x) = 2 \times \frac{1}{2} e^x - 1 = e^x - 1
\]
\[
h'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff \frac{x}{2} > 0 \iff x > 0 \quad \text{et} \quad h'(x) < 0 \iff e^x < 1 \iff \frac{x}{2} < 0 \iff x < 0
\]
(d) **Tableau de variations** de la fonction \( h \) sur \( \mathbb{R} \) :

\[
| x | -\infty | 0 | +\infty |
|-------------------|
| h(x) | 0 | +\infty |
\]

(e) La fonction \( h \) possède un minimum en 0 qui est 0. Donc :
\[
\forall x, \ x \in \mathbb{R}, \ h(x) \geq 0 \iff 2e^x - x - 2 = 2e^x - 1 - x - 1 \geq 0 \iff 2e^x - 1 \geq x + 1
\]

(f) Ainsi la courbe \( \mathcal{C}_g \) se trouve au dessus de la droite d’équation \( y = x + 1 \) qui est la droite \( \Delta \).

3. Étude de la position relative des courbes \( \mathcal{C}_f \) et \( \mathcal{C}_g \)

(a) On a vu plus haut (question 1.) que, pour tout réel \( x \), \( (\frac{e^x}{x} - 1)^2 = f(x) - g(x) \geq 0 \).

(b) Ainsi la courbe \( \mathcal{C}_f \) se trouve au dessus de la courbe \( \mathcal{C}_g \),
Ainsi, \( |f(x) - g(x)| = (f(x) - g(x)) \).
II Métropole septembre 2014

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé \( O ; \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j} \), une courbe \( C \) et la droite \((AB)\) où A et B sont les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (-1 ; 3).

\( \text{On désigne par} \ f \ \text{la fonction dérivable sur} \ \mathbb{R} \ \text{dont la courbe représentative est} \ \mathcal{C}. \)

On suppose, de plus, qu’il existe un réel \( a \) tel que pour tout réel \( x \), \( f(x) = x + 1 +axe^{-x^2} \).

1. (a) Le point A a pour abscisse 0 ; \( f(0) = 1 \) donc \( \mathcal{C} \) passe par le point A (0 ; 1).

(b) Le coefficient directeur de la droite \((AB)\) est \( \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{-1 - 0} = -2 \).

(c) D’après la formule \((e^u)' = u'e^u\) et la dérivée d’une somme et d’un produit :
\[
    f'(x) = 1 + 0 + ae^{-x^2} + ax(-2x)e^{-x^2} = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}
\]

(d) On suppose que la droite \((AB)\) est tangente à la courbe \( \mathcal{C} \) au point A ; cela veut dire que le coefficient directeur de \((AB)\) est égal au nombre dérivé de la fonction \( f \) en \( x_A \) soit \( f'(0) \).

On a donc \( f'(0) = -2 \iff 1 - a(0 - 1)e^0 = -2 \iff 1 + a = -2 \iff a = -3 \).

2. D’après la question précédente, pour tout réel \( x \), \( f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \) et \( f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2} \).

(a) \( \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} > 0 \)
\( \forall x \in ]-1; 0[, -3x > 0 \) Par produit \( \forall x \in ]-1; 0[, -3xe^{-x^2} > 0 \)
\( \forall x \in ]-1; 0[, x + 1 > 0 \) par somme, \( \forall x \in ]-1; 0[, x + 1 - 3xe^{-x^2} > 0 \)
Donc, pour tout \( x \) de \( ]-1; 0[, f(x) > 0 \).

(b) Si \( x \leq -1 \), alors \( x^2 \geq 1 \) donc \( 2x^2 \geq 2 \), donc \( 2x^2 - 1 \geq 1 \) et donc \( 3(2x^2 - 1) \geq 3 \).

Comme pour tout \( x, e^{-x^2} > 0 \), on peut dire que pour tout \( x \leq -1, 3(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0 \) (par produit). Donc, pour tout \( x \leq -1, f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0 \).

(c) Sur \( ]-\infty; -1[ \), \( f'(x) > 0 \) donc la fonction \( f \) est strictement croissante sur cet intervalle donc sur l’intervalle \( \left[ -\frac{3}{2}; -1 \right] \).

Or \( f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -0,026 < 0 \) et \( f(-1) \approx 1,10 > 0 \) donc, d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l’équation \( f(x) = 0 \) admet une solution unique dans l’intervalle \( \left[ -\frac{3}{2}; -1 \right] \) ; on l’appelle \( c \).

Or \( f\left(\frac{3}{2} + 2.10^{-2}\right) \approx 0,017 > 0 \) donc \( c \in \left[ -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2} + 2.10^{-2} \right] \) et donc \( c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2} \).