Correction de la feuille 3

I Polynésie juin 2014

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Intersection de deux courbes :

$$M(x\,;\,y) \in \mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g \iff f(x) = g(x) \iff \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \iff \begin{cases} X = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\ X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 = 0 \end{cases} \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 1 \iff \boxed{x = 0}$$

Ainsi M a pour coordonnées $(0\,;\,1)$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \Longrightarrow \boxed{f'(0) = 1} \quad ; \quad g'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \Longrightarrow \boxed{g'(0) = 1}$$

En M, leurs tangentes ont, toutes deux le même coefficient directeur 1,
elles ont donc **même tangente** Δ d'équation $y - 1 = 1(x - 0) \iff y = x + 1$.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
   (a) Limite de la fonction h en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$$

   (b) Pour tout réel $x \neq 0$

$$x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right) = \cancel{x} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \times \frac{2}{\cancel{x}} - x - \cancel{x}\frac{2}{\cancel{x}} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = h(x)$$

   Limite de la fonction h en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty, \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{X=\frac{x}{2}\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$$

   (croissances comparées)

   (c) Fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 = \boxed{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1}$$

$$h'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 1 \iff \frac{x}{2} > 0 \iff x > 0 \text{ et } h'(x) < 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} < 1 \iff \frac{x}{2} < 0 \iff \boxed{x < 0}$$

   (d) **Tableau de variations** de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   (e) La fonction h possède un minimum en 0 qui est 0. Donc :

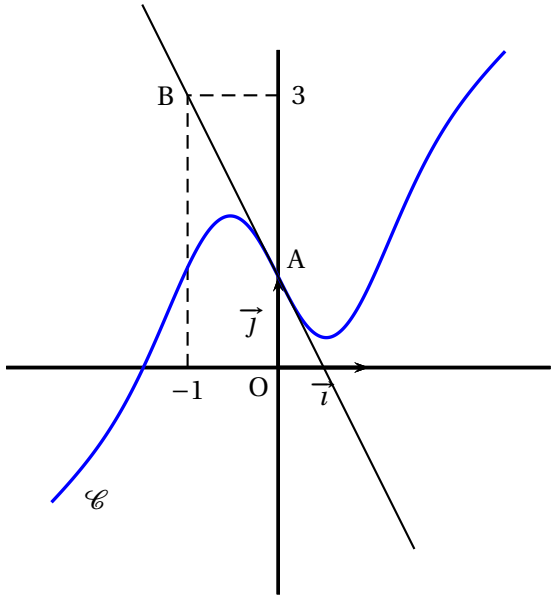
$$\forall x,\ x \in \mathbb{R},\ h(x) \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 - x - 1 \geqslant 0 \iff \boxed{2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1}$$

   (f) Ainsi la courbe $\mathscr{C}_g$ se trouve au dessus de la droite d'équation $y = x + 1$ qui est la droite Δ.

3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
   (a) On a vu plus haut (question 1.) que, pour tout réel x, $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = f(x) - g(x) \geqslant 0$.
   (b) Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.
   Ainsi, $\left|f(x) - g(x)\right| = \left(f(x) - g(x)\right)$.

II Métropole septembre 2014

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(-1\,;\,3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x, $f(x) = x+1+axe^{-x^2}$.

1. (a) Le point A a pour abscisse 0 ; $f(0) = 1$ donc $\mathscr{C}$ passe par le point A $(0\,;\,1)$.

   (b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{-1-0} = \boxed{-2}$.

   (c) D'après la formule $\left(e^u\right)' = u'e^u$ et la dérivée d'une somme et d'un produit :
   $f'(x) = 1+0+ae^{-x^2}+ax(-2x)e^{-x^2} = \boxed{1-a\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}}$

   (d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A ; cela veut dire que le coefficient directeur de (AB) est égal au nombre dérivé de la fonction f en x_A soit $f'(0)$.
   On a donc $f'(0) = -2 \iff 1-a(0-1)e^0 = -2 \iff 1+a = -2 \iff \boxed{a=-3}$

2. D'après la question précédente, pour tout réel x, $f(x) = x+1-3xe^{-x^2}$ et $f'(x) = \boxed{1+3\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}}$.

   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x^2} > 0$
   $\forall x \in]-1\,;\,0],\ -3x \geqslant 0$ Par produit $\forall x \in]-1\,;\,0],\ -3xe^{-x^2} \geqslant 0$
   $\forall x \in]-1\,;\,0],\ x+1 > 0$ par somme, $\forall x \in]-1\,;\,0],\ \boxed{x+1-3xe^{-x^2} > 0}$
   Donc, pour tout x de $]-1\,;\,0]$, $f(x) > 0$.

   (b) Si $x \leqslant -1$, alors $x^2 \geqslant 1$ donc $2x^2 \geqslant 2$, donc $2x^2-1 \geqslant 1$ et donc $3\left(2x^2-1\right) \geqslant 3$.
   Comme pour tout x, $e^{-x^2} > 0$, on peut dire que pour tout $x \leqslant -1$, $3\left(2x^2-1\right)e^{-x^2} > 0$ (par produit). Donc, pour tout $x \leqslant -1$, $f'(x) = 1+3\left(2x^2-1\right)e^{-x^2} > 0$.

   (c) Sur $]-\infty\,;\,-1]$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle donc sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-1\right]$.
   Or $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) \approx -0{,}026 < 0$ et $f(-1) \approx 1{,}10 > 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-1\right]$; on l'appelle c.
   Or $f\left(-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}\right) \approx 0{,}017 > 0$ donc $c \in \left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}\right[$ et donc $c < -\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}$.