TS : correction des exercices sur les nombres complexes

I

On considère trois points du plan A, B et C dont les affixes sont $z_A = 1+\mathrm{i}$, $z_B = 3+5\mathrm{i}$ et enfin $z_C = 2(1+\sqrt{3})+\mathrm{i}(3-\sqrt{3})$.

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = \boxed{2+4\mathrm{i}}$; $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = \boxed{1+2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{3}\right)}$.
2. $AB = \left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = |2+4\mathrm{i}| = 2\,|1+2\mathrm{i}| = \boxed{2\sqrt{5}}$.

   $AC = \left|z_{\overrightarrow{AC}}\right| = \left|1+2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(1+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+4\sqrt{3}+12+4-4\sqrt{3}+3} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

   $AB = AC$ donc ABC est isocèle en A.
3. $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \dfrac{1+2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2+4\mathrm{i}} = \dfrac{\left(1+2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)(2-4\mathrm{i})}{2^2+4^2} = \dfrac{2+4\sqrt{3}+8-4\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(-4-8\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}\right)}{20}$

   $= \dfrac{10-10\mathrm{i}\sqrt{3}}{20} = \boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$.

   $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \boxed{\dfrac{\pi}{3}}$.
4. ABC est un triangle isocèle en A avec un angle en A égal à $\dfrac{\pi}{3}$ donc ABC est **équilatéral**

   Remarque : $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = \dfrac{AB}{AC} = \left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right| = 1$ donc $AB = AC$ et on retrouve que ABC est isocèle.

II

On considère dans le plan complexe l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M_t de coordonnées

$$\begin{cases} x_{M_t} &= -1+2\cos(t) \\ y_{M_t} &= 2+2\sin(t) \end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}$, et C, le point d'affixe $z_C = -1+2\mathrm{i}$.

1. Soient $t \in \mathbb{R}$ et z_t l'affixe de M_t. $|z_t - z_C| = |2\cos t + 2\mathrm{i}\sin t| = 2\,|\cos t + \mathrm{i}\sin t| = 2\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = 2$

   On en déduit que M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon 2.
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ et z son affixe. On pose :

   $z' = z - z_C$.

   (a) $\left|z'\right| = 2$.

   (b) On en déduit que $z' = 2\cos t$ donc $z_M = -1+2\mathrm{i}+2\cos t+2\mathrm{i}\sin t$.

   (c) On en déduit que :

   $$\begin{cases} x_{M_t} &= -1+2\cos(t) \\ y_{M_t} &= 2+2\sin(t) \end{cases}$$

   M appartient donc à $\mathscr{E}$
3. On a montré : $\begin{cases} \mathscr{E} \subset \mathscr{C} \\ \mathscr{C} \subset \mathscr{E} \end{cases}$ donc $\mathscr{C} = \mathscr{E}$.

III Les entiers de Gauß

On appelle *entier de Gauß* tout nombre complexe de la forme $k+\mathrm{i}\ell$, où k et ℓ sont des entiers relatifs. On pose $z=k+\mathrm{i}l$ et $z'=k'+\mathrm{i}l'$.

1. $z+z'=\boxed{(k+k')+\mathrm{i}(l+l')}$ avec $k+k'\in\mathbb{Z}$ et $l+l'\in\mathbb{Z}$ donc la somme de deux entiers de Gauß est un entier de Gauß.
   Idem pour la différence.
2. $\boxed{zz'=\left(kk'-ll'\right)+\mathrm{i}\left(kl'+k'l\right)}$ avec $kk'-ll'\in\mathbb{Z}$ et $kl'+k'l\in\mathbb{Z}$ donc le produit de deux entiers de Gauß est un entier de Gauß.
3. $2\mathrm{i}$ est un entier de Gauß mais $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ car $\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$ mais $-\dfrac{1}{2}$ n'est **pas** un entier donc l'inverse d'un entier de Gauß n'est pas forcément un entier de Gauß.

Pour les curieux, voir ici.

IV

On se propose dans cet exercice de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

1. Pour tout nombre complexe
   $z\neq 1$, $1+z+z^2+z^3+z^4=\dfrac{1-z^5}{1-z}$. (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison z).
2. On pose $z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$. On a : $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=\boxed{\dfrac{1-z_0^5}{1-z_0}}$.

   Or $1-z_0^5=1-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^5=1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}=0$.

   $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=0\Leftrightarrow z_0^2\left(\dfrac{1}{z_0^2}+\dfrac{1}{z_0}+1+z_0+z_0^2\right)$.

   On en déduit que $z_0^2\left(\dfrac{1}{z_0^2}+\dfrac{1}{z_0}+1+z_0+z_0^2\right)=0\Leftrightarrow\boxed{\left(z_0^2+\dfrac{1}{z_0^2}\right)+\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)+1=0}$ en divisant par z_0^2 non nul et en associant les nombres deux par deux.
3. $\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)^2-2=z_0^2+2+\dfrac{1}{z_0^2}-2=z_0^2+\dfrac{1}{z_0^2}$ d'où le résultat.

   $\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}=\boxed{2\cos\dfrac{2\pi}{5}}$.
4. $\left(z_0^2+\dfrac{1}{z_0^2}\right)+\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)+1=0\Leftrightarrow\left(\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)^2-2\right)+\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)+1=0\Leftrightarrow 4\cos^2\dfrac{2\pi}{5}-2+2\cos\dfrac{2\pi}{5}+1=0$
   $\Leftrightarrow\boxed{4\cos^2\dfrac{2\pi}{5}+2\cos\dfrac{\pi}{5}-1=0}$.

   $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est donc une solution de l'équation $4X^2+2X-1=0$. $\Delta=20>0$; l'équation a deux solutions :
   $X_1=\dfrac{-2-\sqrt{20}}{8}=\dfrac{-2-2\sqrt{5}}{8}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}<0$ et $X_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}>0$.

   Comme $\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ car $0\leqslant\dfrac{2\pi}{5}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit $\boxed{\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$