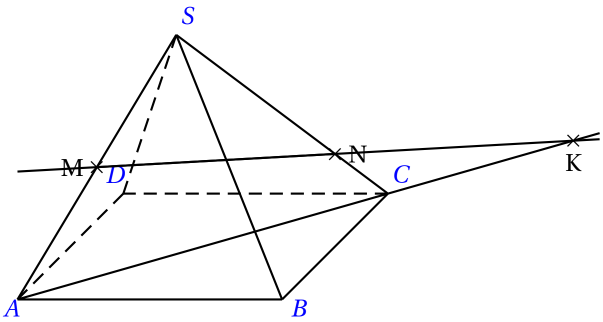
TS : correction du contrôle de géométrie dans l'espace

I (3 points)

SABCD est une pyramide régulière à base carrée. M est le milieu de [SA], N est le point de [SC] tel que $SN = \dfrac{3}{4}SC$.

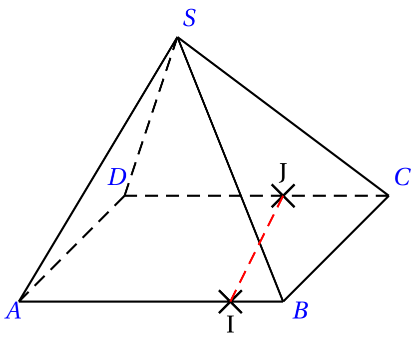
1. M appartient à la droite SA donc au plan (SAC) ; de même N appartient à la droite SC donc au plan (SAC).
   On en déduit que la droite (MN) appartient au plan (SAC).
   Dans le plan (SAC), S, M et A sont alignés ; S, N et C sont alignés dans le même ordre : $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{3}{4}$.
   $\dfrac{SM}{SA} \neq \dfrac{SN}{SC}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (AC) sont coplanaires et non parallèles, donc elles sont **sécantes**.
2. Pour avoir le point d'intersection de (MN) et (AC), il suffit de prolonger les deux droites.



II (3 points)

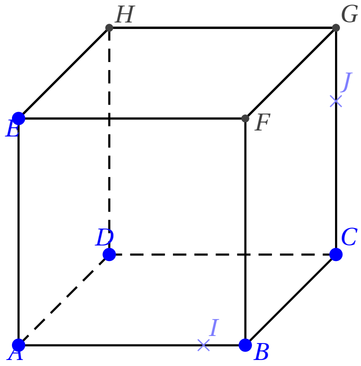
Dans un tétraèdre ABCD, I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CD].
Le but de l'exercice est de trouver l'intersection des plans (AJB) et (CID).

1. I appartient à la droite (AB) donc au plan (AJB) et au plan (CID).
   J appartient à la droite (CD) donc au plan (CID) et au plan (AJD).
2. L'intersection de deux plans est une droite.
   I et J appartiennent à chacun des plans (AJD) et (CID) ; l'intersection de ces deux plans est donc la **droite (IJ)**.



III (3 points)

On considère un cube ABCDEFGH,
I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CG].
I appartient à la droite (AB) donc au plan (ABJ), ainsi qu'au plan (CGI).
J appartient à la droite (CG) donc au plan (CGI), ainsi qu'au plan (ABJ).
I et J appartiennent donc à l'intersection de ces deux plans, donc l'intersection des plans (ABJ) et (CGI) est la **droite (IJ)**.



IV (3 points)

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0\,;\,3\,;\,4)$, $B(1\,;\,-1\,;\,-1)$ et $C(2\,;\,0\,;\,2)$.

1. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -1+4+15 = 18$. 1 pt
2. On en déduit $BA = \sqrt{(-1)^2+4^2+5^2} = \sqrt{42}$; $BC = \sqrt{1^2+1^2+3^2} = \sqrt{11}$.
   $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\widehat{ABC}$ d'où $18 = \sqrt{42}\times\sqrt{11}\cos\widehat{ABC}$ donc $\cos\widehat{ABC} = \boxed{\dfrac{18}{\sqrt{42}\times\sqrt{11}}}$. 1.5 pt
   On en déduit que $\widehat{ABC} \approx \boxed{33,13\,^\circ}$. 0.5 pt

V (2 points)

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le point A(1; 3; -5) et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}$.

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $1\,(x-1)-5\left(y-3\right)+2(z+5)=0$ d'où $\boxed{x-5y+2z+24=0}$

VI (3 points)

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations respectives :
$\mathscr{P}$: $2x+3y-5z+8=0$ et
$\mathscr{Q}$: $3x-7y-3z-5=0$.
$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
$\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}3\\-7\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{Q}$.
$\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 2\times2+3\times(-7)+(-5)\times(-3) = 6-21+15 = 0$.
$\vec{n}\perp\overrightarrow{n'}$ donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont **orthogonaux**.

VII (3 points)

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x+3y-z+2=0$ et un point $A(1\,;\,5\,;\,-2)$.
$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, donc un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.
Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}x=1+2t\\y=5+3t\qquad t\in\mathbb{R}\\z=-2-t\end{array}\right.}$$