Correction du TD sur les propriétés algébriques des nombres complexes

I Produit

1. Soit a et b deux réels quelconques.
   $(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2+2\mathrm{i}ab+(\mathrm{i}b)^2 = a^2+2\mathrm{i}ab+\mathrm{i}^2b^2 = \boxed{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}$
2. • $(1+\mathrm{i})^2 = 1^2+2\mathrm{i}-1 = \boxed{2\mathrm{i}}$
   • $(1+\mathrm{i})^3 = (1+\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2 = \boxed{-2+2\mathrm{i}}$
   • $(1+\mathrm{i})^4 = \left[(1+\mathrm{i})^2\right]^2 = (2\mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i}^2 = \boxed{-4}$
3. On pose $j = -\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) • $j^2 = \left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}-2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\dfrac{3}{4}\mathrm{i}^2 = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
   • On remarque $j^2=\overline{j}$ donc $j^3 = j\times j^2 = j\overline{j} = |j|^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \boxed{1}$
   (b) On raisonne selon la divisibilité de n par 3 : on a trois cas :
   • $n=3k,\ k\in\mathbb{N} : j^n = j^{3k} = \left(j^3\right)^k = 1^k = \boxed{1}$
   • $n=3k+1,\ k\in\mathbb{N} : j^n = j^{3k+1} = \left(j^3\right)^k\times j = 1^k\times j = \boxed{j}$
   • $n=3k+2,\ k\in\mathbb{N} : j^n = j^{3k+2} = \left(j^3\right)^k\times j^2 = 1^k\times j^2 = \boxed{j^2}$

II

1. Soit $z=3+4\mathrm{i}$; $z\overline{z} = 3^2+4^2 = 9+16 = \boxed{25}$
2. Soit $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. $z\overline{z} = \cos^2\theta+\sin^2\theta = \boxed{1}$
   Pouvait-on deviner la réponse sans calcul?
   Oui, car $M(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ est un point du cercle trigonométrique et $z\overline{z} = OM^2 = 1^2 = 1$

III Inverse d'un nombre complexe

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$A = \dfrac{1}{\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = \dfrac{\mathrm{i}}{-1} = \boxed{-\mathrm{i}}$

$B = \dfrac{1}{2+3\mathrm{i}} = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{2^2+3^2} = \boxed{\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}\mathrm{i}}$

$C = \dfrac{1}{7-4\mathrm{i}} = \dfrac{7+4\mathrm{i}}{7^2+4^2} = \boxed{\dfrac{7}{65}+\dfrac{4}{65}\mathrm{i}}$

$D = \dfrac{1}{j} = \dfrac{j^2}{j^3} = j^2 = \overline{j} = \boxed{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

IV Quotient de deux nombres complexes

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$A = \dfrac{2+3\mathrm{i}}{5-7\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\mathrm{i})(5+7\mathrm{i})}{5^2+7^2} = \dfrac{10-21+14\mathrm{i}+15\mathrm{i}}{74} = \boxed{-\dfrac{11}{74}+\dfrac{29}{74}\mathrm{i}}.$

$B = \dfrac{5+9\mathrm{i}}{5-9\mathrm{i}} = \dfrac{(5+9\mathrm{i})^2}{5^2+9^2} = \dfrac{25-81+90\mathrm{i}}{5^2+9^2} = -\dfrac{56}{106}+\dfrac{90}{106}\mathrm{i} = \boxed{-\dfrac{28}{53}+\dfrac{45}{53}\mathrm{i}}$

V

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on associe, à tout point M d'affixe z; le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-3}{\mathrm{i}z+2}$.
On désigne par A le point d'affixe 3 et par B celui d'affixe 2i.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x' et y' réels.

   Remarque : z' est défini pour $z \neq -\dfrac{2}{\mathrm{i}}$ donc $z \neq 2\mathrm{i}$; il faut donc que $M \neq B$.

   On a $z' = \dfrac{z-3}{\mathrm{i}z+2} = \dfrac{x+\mathrm{i}y-3}{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+2} = \dfrac{x-3+\mathrm{i}y}{2-y+\mathrm{i}x} = \dfrac{[(x-3)+\mathrm{i}y][(2-y)-\mathrm{i}x]}{x^2+(2-y)^2}$

   $= \dfrac{(x-3)(2-y)+xy+\mathrm{i}[-x(x-3)+y(2-y)]}{x^2+(2-y)^2} = \dfrac{2x+3y-6+i\left(-x^2+3x-y^2+2y\right)}{x^2+(2-y)^2}$.

   On en déduit que : $\boxed{x' = \dfrac{2x+3y-6}{x^2+(2-y)^2}}$ et $\boxed{y' = \dfrac{-x^2+3x-y^2+2y}{x^2+(2-y)^2}}$

2. M' appartient l'axe $\left(O\,;\,\vec{u}\right)$ équivaut à $y' = 0$ avec $M \neq B$.

   Or $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2+3x-y^2+2y = 0 \Leftrightarrow x^2-3x+y^2-2y \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} + (y-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{13}{4}$.

   En appelant Ω le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,1\right)$, l'équation ci-dessus s'écrit $\Omega M^2 = \dfrac{13}{4}$ qui est l'équation du cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

   Les coordonnées de A et de B vérifient cette équation et Ω est clairement le milieu de [AB].

   Γ est donc le **cercle de diamètre [AB], privé de B**.

3. Pour $z \neq 2\mathrm{i}$, $\dfrac{z-3}{\mathrm{i}z+2} = 1 \Leftrightarrow z-3 = \mathrm{i}z+2 \Leftrightarrow z(1-\mathrm{i}) = 5 \Leftrightarrow z = \dfrac{5}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{5(z+\mathrm{i})}{2} = \boxed{\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}}$.

   On remarque que la solution précédente est z_K.

   1 est un réel donc l'affxe d'un point de l'axe $\left(O\,;\,\vec{u}\right)$; d'après la question précédente, z_K est l'affixe d'un point de Γ donc **K appartient au cercle Γ**.