TS : correction de l'exercice sur la fonction ln (groupe 2)

D'après Bac Centres Étrangers juin 2000

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\mathrm{e}^{x}}.$$

Partie A

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1).$$

(a) **Limite en 1 :** $\lim\limits_{x\to 1} 2x=\boxed{1}$

Limite en $+\infty$ (non demandée)

On a une forme indéterminée.

$\forall x,\ f(x)=x\left[1-\dfrac{x-1}{x}\times\ln(x-1)\right]$.

$\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}=1-\dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}=1\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\dfrac{x-1}{x}\ln(x-1)\right]=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$.

Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

(b) Calculer $g'(x)$ pour $x\in]1\ ;\ +\infty[$.

(c) $1-\ln(x-1)>0\Leftrightarrow\ln(x-1)<1\Leftrightarrow x-1<\mathrm{e}^1=\mathrm{e}\Leftrightarrow x<1+\mathrm{e}\Leftrightarrow 1-\ln(x-1)=0\Leftrightarrow\ln(x-1)=1$
$\Leftrightarrow x-1=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}\Leftrightarrow x<1+\mathrm{e}$.

(d) On en déduit que g est croissante sur $[1\ ;\ +\mathrm{e}+1]$ puis décroissante sur $[\mathrm{e}+1\ ;\ +\infty[$

x	1		$\mathrm{e}+1$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$\mathrm{e}+2$	$\searrow$	$-\infty$

(e) Il est clair que $g(x)\neq 0$ sur $]1\ ;\ \mathrm{e}+1]$.

- g est continue (somme, produit et composée de fonctions continues)
- $g(\mathrm{e}+1)=\mathrm{e}+2>0$
- $g\left(\mathrm{e}^3+1\right)\approx -18<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $g(x)=0$ admet une solution danas l'intervalle $\left[\mathrm{e}+1\ ;\ \mathrm{e}^3+1\right]$; celle-ci est unique car g est monotone sur cet intervalle. On note α cette solution.

Signe de g :

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2. φ est la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$\varphi(x)=\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$$

.

(a)
- **Limite en 1** : $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left(x^2-1\right)=-\infty$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=-\infty}$.
- **Limite en $+\infty$** :

  On a une forme indéterminée; on esssaye de faire apparaître une formule de croissances comparées donc de faire apparaître la fraction $\dfrac{\ln x}{x}$.

  $x^2-1=x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $\ln\left(x^2-1\right)=\ln\left(x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\right)=\ln\left(x^2\right)+\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=2\ln x+\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

  Alors : $\boxed{\varphi(x)=2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\times\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}$.

  D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$.

$\lim_{x\to=\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc, par produit, $\lim_{x\to=\infty}\left(\frac{1}{x}\times\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0$.

On en déduit que : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0}$.

(b) φ est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ comme quotient et composée de fonctions dérivables.

$\varphi = \dfrac{\ln(u)}{v}$ avec $u(x) = x^2-1$ et $v(x) = 1$.

$\varphi' = \left(\dfrac{\ln(u)}{v}\right)' = \dfrac{(\ln(u))'v - \ln(u)v'}{v^2} = \dfrac{\frac{u'}{u}v - \ln(u)v'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$.

$\varphi'(x) = \dfrac{\frac{2x}{x^2-1}\times x - 1\times\ln\left(x^2-1\right)}{x^2} = \boxed{\dfrac{2x^2-\left(x^2-1\right)\ln\left(x^2-1\right)}{x^2\left(x^2-1\right)}}$.

$\forall x>1$, $x^2>0$ et $x^2-1>0$ donc $\varphi'(x)$ est du signe du numérateur.

On constate que ce dénominateur, $2x^2-\left(x^2-1\right)\ln\left(x^2-1\right) = g\left(x^2\right)$.

(c) D'après le signe de g, on a $\varphi'(x)\geqslant 0$ pour $1\leqslant x^2\leqslant\alpha$ donc $1\leqslant x\leqslant\sqrt{\alpha}$ et $\varphi'(x)\leqslant 0$ pour $\alpha\leqslant x^2$, c'est-à-dire $\sqrt{\alpha}\leqslant x$.

Par conséquent : φ est croissante sur $]1\,;\,\sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty[$

Partie B

1. Pour tout $x\in]0\,;\,+\infty$, $f(x) = \dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x} = \dfrac{\ln\left(e^x\right)^2-1}{x} = \varphi\left(e^x\right)$.
2. En déduire :
   (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\varphi\left(e^x\right) = \lim_{X\to 1}\varphi(X) = \boxed{-\infty}$.
   (b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\varphi\left(e^x\right) = \lim_{X\to+\infty}\varphi(X) = \boxed{0}$.
   (c) $f = \varphi\circ w$ avec $w(x) = e^x$ donc $f' = w'\times\varphi'\circ w$ d'où
   $f'(x) = e^x\times\varphi'(e^x)$.
   $e^x>0$ donc $f'(x)\geqslant 0$ pour $1\leqslant e^x\leqslant\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow 0<x\leqslant\ln\sqrt{\alpha}$ et $f'(x)\leqslant 0$ pour $x\geqslant\ln\sqrt{\alpha}$.
3. Le maximum de f est $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\ln\alpha\right) = \dfrac{\ln\left(e^{\ln\alpha}\right)-1}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}} = \dfrac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$.

   Or, par définition de α, on a $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = (\alpha-1)\ln(\alpha-1)\Leftrightarrow\ln(\alpha-1) = \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.

   On en déduit que $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = \dfrac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}}$.

   Tableau de variation de f :

x	0	$\ln\sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	↘ 0

Courbe (non demandée)