Correction du devoir surveillé commun n° 1 - TS1 & TS2

Exercice I

1. $u_n = -2n^3 + 5n^2 - 4n + 1$. On a une forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ »..
   On lève l'indétermination, en factorisant par le terme de plus haut degré.
   $u_n = -2n^3 + 5n^2 - 4n + 1 = n^3\left(-2 + \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2 + \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = -2$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$
2. $u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 + 5}$. On a une forme indéterminée. On factorise numérateur et dénominateur chacun par leur terme de plus haut degré, puis on simplifie.
   $u_n = \dfrac{n^2\left[1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right]}{n^3\left[4 + \frac{5}{n^3}\right]} = \dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{n\left[4 + \frac{5}{n^3}\right]}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[4 + \frac{5}{n^3}\right] = 4$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n}\right] = 1$ donc par produit et quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.
3. $u_n = \dfrac{1}{n}(n^2 + 5n - 7) = n + 5 - \dfrac{7}{n}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{n}\right) = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$
4. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$. On a encore une forme indéterminée.
   Pour lever l'indétermination, on utilise la forme conjuguée.
   $u_n = \dfrac{\left[\sqrt{n^2+1} - n\right]\left[\sqrt{n^2+1} + n\right]}{\left[\sqrt{n^2+1} + n\right]} = \dfrac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+1\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+1} = +\infty$ d'où, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1} + n\right) = +\infty}$
   donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Exercice II

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ est divisible par 5. La première chose à faire est de traduire cela sous forme mathématique.
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $6^n - 1 = 5k_n,\ k_n \in \mathbb{Z}$ »

- **Initialisation** : pour $n = 0$: $6^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 5 \times 0 = 5k_0$ avec $k_0 = 0 \in \mathbb{Z}$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité** : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour **un** rang n quelconque, donc $6^n - 1 = 5k_n,\ k_n \in \mathbb{Z}$ (d'où $6^n + 5k_n + 1$).
  Alors : $6^{n+1} - 1 = 6 \times 6^n - 1 = 6(5k_n + 1) - 1 = 5 \times 6k_n + 6 - 1 = 5 \times 6k_n + 5 = 5(6k_n + 1) = 5k_{n+1}$ en posant $k_{n+1} = 6k_n + 1 \in \mathbb{Z}$. On obtient bien un multiple de 5.
  La propriété est donc **héréditaire**.

Conclusion : d'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $6^n - 1$ est divisible par 5 pour tout n.

Exercice III

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $S_n = \dfrac{1}{1\times 2\times 3}+\dfrac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ » pour $n \geqslant 1$

- Initialisation : Pour $n=1$, on a $S_1 = \dfrac{1}{2\times 3\times 4} = \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \dfrac{1\times 4}{4\times 2\times 3} = \dfrac{1}{6} = S_1$ donc P_1 est vraie.
- On suppose P_n vraie pour un entier n quelconque, donc

$$S_n = \frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$
$= \dfrac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$.

On doit montrer que cette expression vaut $\dfrac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

Or : $\dfrac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} = \dfrac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{\left(n^2+2n+1\right)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$
$= \dfrac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$ donc $\boxed{S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}}$.

La propriété est donc **héréditaire**.

Conclusion : d'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice IV

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et telle qu'aucun de ses termes ne soit nul.
On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{4}{u_n}$.

1. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

   Faux : Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ avec $\ell \neq 0$, (v_n) converge vers $-\dfrac{4}{\ell}$, mais alors on se doute qu'il y a un problème pour $\ell = 0$.

   Prenons par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. On obtient alors $v_n = -4(n+1)$, terme général d'une suite qui tend vers $-\infty$, donc non convergente.

2. Si la suite (u_n) est minorée par 2, alors la suite (v_n) est minorée par 2.

   faux : Par hypothèse, (u_n) est minorée par 2.

   Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{4}{u_n} \geq -1 \Rightarrow v_n \geq -2$, donc la suite (v_n) semble minorée par -2.

   Exemple : $u_n = 2$ (suite constante), bien minorée par 2 ; $v_n + -\dfrac{4}{u_n} = -\dfrac{4}{2} = -2$ qui n'est donc pas minoré par 2 !

   Faux : reprenons comme exemple $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ qui est bien le terme général d'une suite décroissante. On obtient $v_n = -2(n+1)$, donc une suite (v_n) décroissante.

3. **faux**. Prenons $u_n = (-1)^n$. Alors, $v_n = -\dfrac{2}{(-1)^n} = \pm 2$. Cette suite vaut alternativement 2 ou -2, donc ne converge pas vers 0.

Exercice V

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2$.

1. On trouve $u_1 = 5$; $u_2 = 13$ et $u_3 = 33$.
2. Pour tout entier naturel n, soit la propriété P(n) : « $u_n \geqslant 2n$ ».
   On montre $P(n)$ par récurrence :
   - Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $2 \times 0 = 0$ donc $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier n donc $u_n \geqslant 2n$. (hypothèse de récurrence).
     $u_n \geqslant 2n \Rightarrow 3u_n \geqslant 6n \Rightarrow u_{n+1} \geqslant 2n + 2 = 2(n+1) \Rightarrow u_{n+1} \geqslant 2(n+1)$, donc $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \geqslant 2n$.
3. $o_n \geqslant 2n$ pour tout n et $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n) = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ d'après le théorème de comparaison.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2n$.
   (a) Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) = 3u_n - 4n + 2 - 2n - 2 = 3(u_n - 2n) = \boxed{3v_n}$, donc (v_n) est géométrique de raison $q = 3$.
   (b) $v_0 = 1$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 q^n = 3^n$ donc $\boxed{u_n = 3^n + 2n}$.
   (c) $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} 3^i + \sum_{i=0}^{i=n}[2i] = \sum_{i=0}^{i=n} 3^i + 2\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{3^{n+1}-1}{3-1} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} + n(n+1)}$.

Exercice VI

1. D'après la définition $u_2 = u_1 - \dfrac{1}{4}u_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$.
   - Si la suite était géométrique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $-\dfrac{1}{2}$;

   or $u_1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \neq u_2$.
   - Si la suite était arithmétique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $\dfrac{1}{2} - (-1) = \dfrac{3}{2}$; or

   $u_1 + \left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{4}{2} = 2 \neq u_2$.

   Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. (a) $v_0 = u_1 - \dfrac{1}{2}u_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times (-1) = 1$.
   (b) On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{1}{2}u_{n+1} =$
   $\dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n\right) = \boxed{\dfrac{1}{2}v_n}$.
   (c) $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ signifie que la suite (v_n) est une **suite géométrique** de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

(d) On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{1}{2^n}}$.

3. (a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = \boxed{-1}$.

(b) Pour tout n, $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \boxed{2 + \frac{u_n}{v_n}}$ (en séparant la fraction en deux et en simplifiant).

(c) On a par définition $\frac{u_n}{v_n} = w_n$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit :

$\boxed{w_{n+1} = 2 + w_n}$.

(d) L'égalité précédente montre que la suite (w_n) est une suite **arithmétique** de premier terme -1 et de raison 2.

On a donc $w_n = w_0 + n \times 2 = \boxed{2n-1}$.

4. On a trouvé que $w_n = 2n - 1 = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$.

Donc $\boxed{u_n = \frac{2n-1}{2^n}}$, car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

5. (**Bonus**)

Démontrons par récurrence que : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

- Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$. La formule est vraie au rang 0.
- Hérédité : supposons qu'il existe un naturel k tel que :

$S_k = \sum_{i=0}^{k} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_k = 2 - \frac{2k+3}{2^k}$.

Donc $S_{k+1} = S_k + u_{k+1} = 2 - \frac{2k+3}{2^k} + \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-4k-6+2k+1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-2k-5}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2k+5}{2^{k+1}}$
$= 2 - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}$.

La formule est vraie au rang $k+1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Bonus :

Soit (u_n) une suite convergeant vers 2.

Soit $I =]1\,;\,3[$. Puisque (u_n) converge vers 2, il existe un entier p tel que, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \in]1\,;\,3[$, donc les termes u_n sont positifs pour $n \geqslant p$.