TS1-TS2 : contrôle commun n° 4 (4 heures)

I Centres étrangers juin 2014

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. (a) $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_0 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} \times 16 = \boxed{8+8\mathrm{i}}$.
   $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_1 = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)(8+8\mathrm{i}) = 4+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}-4 = \boxed{8\mathrm{i}}$.
   $z_3 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_2 = 8\mathrm{i}\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right) = 4\mathrm{i}-4 = \boxed{-4+4\mathrm{i}}$.

   (b) **Voir l'annexe**.

   (c) Si $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ alors $|z|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4}$, donc $\boxed{|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.
   Donc $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$.
   Un argument de $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ est donc $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$.

   (d) $\mathrm{O}A_0 = ||z_0| = r_0 = \boxed{16}$;
   $\mathrm{O}A_1 = ||z_1| = r_1 = \sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{64\times 2} = \boxed{8\sqrt{2}}$;
   $A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8+8\mathrm{i}-16| = |-8+8\mathrm{i}| = \boxed{8\sqrt{2}}$.
   On a donc $\mathrm{O}A_1 = A_0A_1$: le triangle est **isocèle** en A_1 ;
   D'autre part $\left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 16^2 \iff A_0A_1^2 + \mathrm{O}A_1^2 = \mathrm{O}A_0^2$ signifie (réciproque du théorème de Pythagore) que le triangle $\mathrm{O}A_0A_1$ est **rectangle** en A_1.

   Autre méthode :
   Soit $Z = \dfrac{z_0 - z_1}{z_O - z_1} = \dfrac{8-8\mathrm{i}}{-8-8\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$.
   On en déduit que $|Z| = \left|\dfrac{OA_1}{A_0A_1}\right| = |\mathrm{i}| = 1$ donc $OA_0 = A_0A_1$ et $\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{z_0 - z_1}{z_O - z_1}\right) = \left(\overrightarrow{A_1O}\,;\,\overrightarrow{A_1A_0}\right) = \arg(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}$. Le triangle OA_0A_1 est bien rectangle isocèle en A_1.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n\right| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n|$ (le module du produit est égal au produit des modules) $= \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2} r_n}$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_n}$ donc la suite (r_n) est **géométrique**, de raison $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.
   On sait que $r_n = r_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \boxed{16\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$.
   Comme $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \boxed{0}$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0}$.
   La suite converge vers $\boxed{0}$.
   Comme $r_n = |z_n| = \mathrm{O}A_n$, ceci signifie géométriquement que la limite des points A_n est le point O.

3. (a) Quel que soit le naturel n :

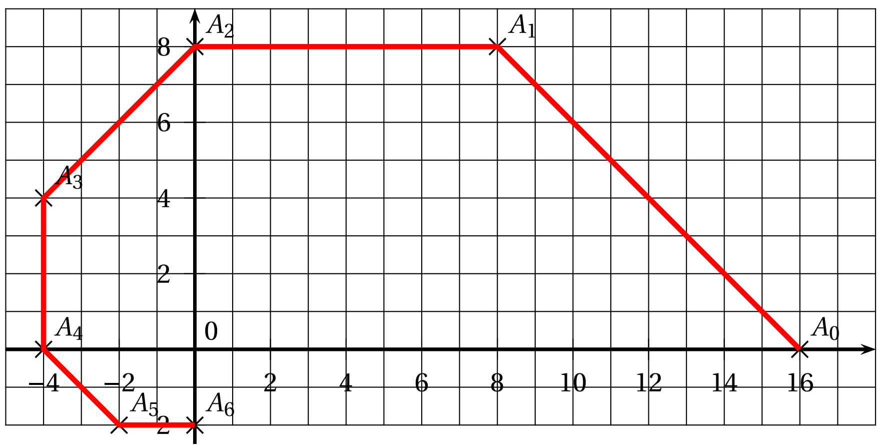
$$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n - z_n\right| = \left|z_n\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2} - 1\right)\right| = \left|z_n\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right)\right| = \left|\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}r_n = r_{n+1}}.$$

(b) L_n est donc la somme des n (sauf r_0) premiers termes de la suite géométrique (r_n).

Donc $\boxed{L_n = 8\sqrt{2}\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}$.

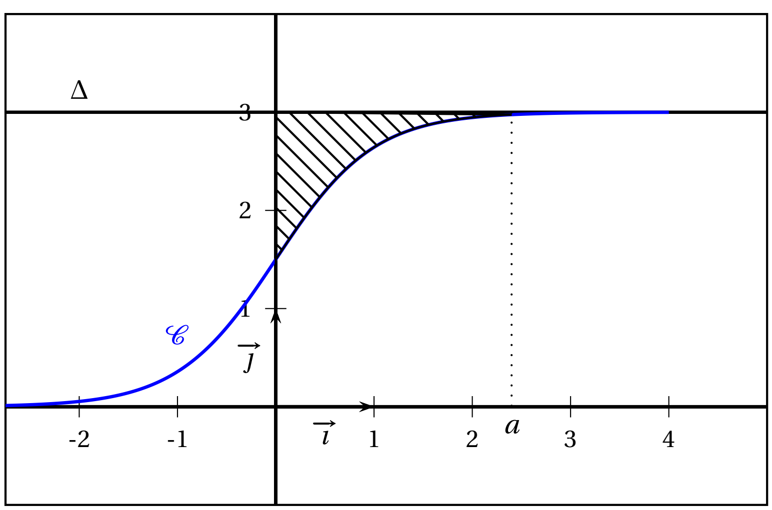
(c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \frac{8\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{16}{\sqrt{2}-1} = \frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1}$

$= \boxed{16\left(\sqrt{2}+1\right)}$.



II Pondichéry avril 2015

Partie A



1. On sait que $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $1+\mathrm{e}^{-2x} > 1 > 0$. Le dénominateur étant non nul, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle la fonction étant de la forme $\frac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-2x}$, donc $u'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ on a :

   $f'(x) = -\frac{3u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{3\times(-2)\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2} = \boxed{\frac{6\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2}} > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction f est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ (comme le laisse supposer le graphique).

2. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ et en posant $X = -2x$, $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, d'où $\lim\limits_{X \to -\infty} \left(1 + \mathrm{e}^X\right) = 1$ et enfin par quotient de limites $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3}$: ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est **asymptote** à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(0) = \dfrac{3}{1+1} = 1{,}5$ à 3 : d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2{,}999$ (l'unicité vient de la montonie de la fonction).

   La calculatrice donne :

   $f(4) \approx 2{,}99899$ et $f(5) \approx 2{,}9999$, donc $4 < \alpha < 5$;

   $f(4,0) \approx 2{,}99899$ et $f(4,1) \approx 2{,}9992$, donc $4,0 < \alpha < 4,1$;

   $f(4,00) \approx 2{,}99899$ et $f(4,01) \approx 2{,}99901$, donc $\boxed{4,00 < \alpha < 4,01}$. (encadrement à 10^{-2} près.

Partie B

1. On a vu dans la partie A que $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3 - f(x)$, soit $\boxed{h(x) > 0}$ sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3-3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$ $= 3 - f(x) = h(x)$.

   Donc H est **une primitive** de h sur $\mathbb{R}$.

3. (a) On a vu que sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ (avec $a >$), la fonction h est positive, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

   Mais comme $h(x) = 3 - f(x)$, cette surface est la surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ (voir l'aire hachurée ci-dessus).

   (b) D'après la question **B. 2.**, on a :

   $\displaystyle\int_0^a h(x)\mathrm{d}x = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times 0}\right) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) = \boxed{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)}$.

   (c) D'après la question précédente, on sait que l'aire de $\mathscr{D}_a$, surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ est égale à $\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-2x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = 2$, donc finalement par composition, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = \boxed{\dfrac{3}{2}\ln 2 \approx 1,04 \text{ (u. a.)}}$

III D'après Bac (Antilles-Guyane - septembre 2013

Partie A : modélisation et simulation

1. $(-1\,;\,1)$: non car $x < 0$ ce qui n'est pas possible ;

   $(10;0)$: oui par exemple en choisissant 10 fois la valeur 0 pour y ;

   $(2;4)$: non car $y > 2$;

   $(10;2)$: oui par exemple en choisissant dans cet ordre 8 fois la valeur 0 puis deux fois la valeur 1 pour y.

2. Pour que Tom ait réussi la traversée, il faut qu'il **soit arrivé au bout des 10 étapes**, c'est-à-dire que $x = 10$ et qu'il ne **tombe pas lors de cette dernière étape**, ce qui est encore possible si sa position à l'étape précédente était $(9\,;\,1)$ ou $(9\,;\,-1)$; il faut donc tester également si y n'est pas plus grand que 1 ou plus petit que -1 en fin d'algorithme.

On remplace dans l'algorithme la ligne :

Afficher « la position de Tom est » $(x ; y)$

par :

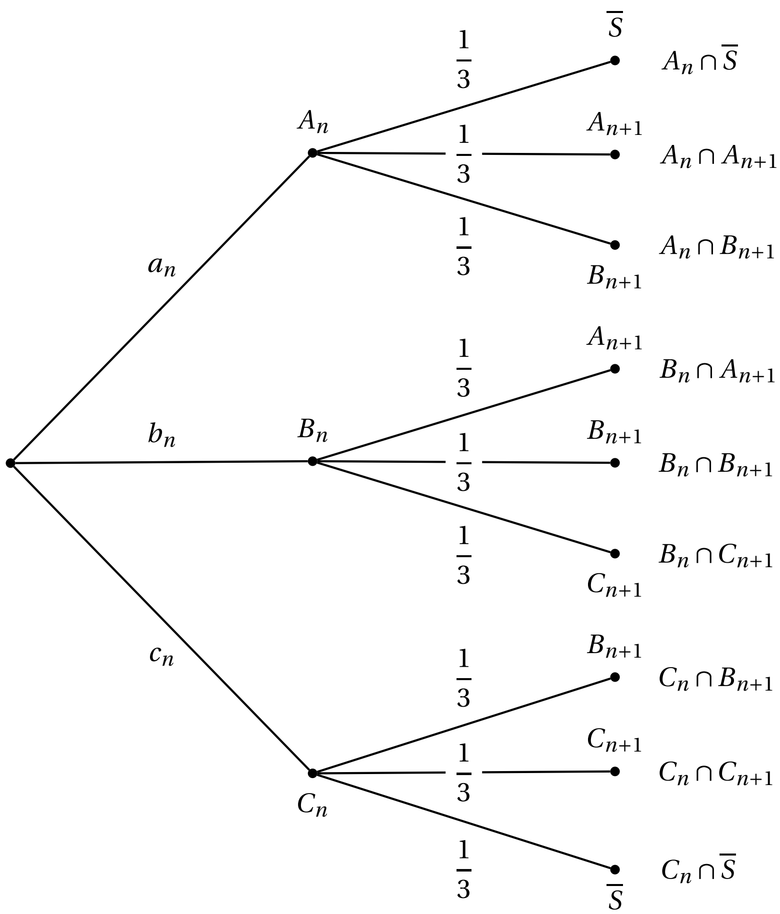
Si $x = 10$ et $y \geqslant -1$ et $y \leqslant 1$
alors Afficher « Tom a réussi la traversée »
sinon Afficher « Tom est tombé »
Fin du si

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :
A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Au départ, Tom se trouve à l'origine O donc son ordonnée est 0; donc l'événement B_0 est réalisé : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.
2. On va représenter sur un arbre pondéré le passage de l'état n à l'état $n+1$; une branche vers le haut signifie que le nombre choisi au hasard est -1, une branche du milieu signifie que le nombre est 0 et une branche vers le bas signifie que ce nombre vaut 1.

   Il est dit dans le texte que S représente l'événement « Tom traverse le pont » donc $\overline{S}$ désigne l'événement « Tom est tombé à l'eau ».



D'après la formule des probabilités totales :

$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1})$

$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) = a_n \times \dfrac{1}{3} + b_n \times \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{a_n + b_n}{3}}$

De même $b_{n+1} = P(B_{n+1}) = a_n \times \dfrac{1}{3} + b_n \times \dfrac{1}{3} + c_n \times \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{a_n + b_n + c_n}{3}}$

et $c_{n+1} = P(C_{n+1}) = b_n \times \dfrac{1}{3} + c_n \times \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{b_n + c_n}{3}}$

3. $P(A_1) = a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$; $P(B_1) = b_1 = \dfrac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$;
   $P(C_1) = c_1 = \dfrac{b_0 + c_0}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.
4. Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements si l'ordonnée y de sa position vaut -1, 0 ou 1, autrement dit dans le cas de l'événement $A_2 \cup B_2 \cup C_2$. Les trois événements A_2, B_2 et C_2 sont incompatibles donc $P(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = P(A_2) + P(B_2) + P(C_2)$.
   $a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{3} = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \boxed{\dfrac{2}{9}}$; $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3} = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$;
   $c_2 = \dfrac{b_1 + c_1}{3} = \dfrac{\frac{1}{3}}{3} = \boxed{\dfrac{2}{9}}$.
   $P(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = P(A_2) + P(B_2) + P(C_2) = a_2 + b_2 + c_2 = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} = \boxed{\dfrac{7}{9}}$.
   La probabilité que Tom se trouve sur le pont après deux déplacements est $\dfrac{7}{9}$.
5. Pour la même raison que dans la question précédente, la probabilité que Tom traverse le pont est $P(A_{10} \cup B_{10} \cup C_{10}) = P(A_{10}) + P(B_{10}) + P(C_{10}) = a_{10} + b_{10} + c_{10} \approx 0{,}040\,272 + 0{,}056\,953 + 0{,}040\,272 \approx \boxed{0{,}137\,497}$ (d'après le tableau fourni).
   Une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont est 0,137.

IV

Réservé aux candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques

1. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
   Par l'absurde : si (IJ) et (EC) étaient coplanaires, alors, le point J appartiendrait au plan (ECI) c'est-à-dire au plan (ECA), ce qui est faux.
2. La bonne réponse est $\boxed{\text{c}}$.
   Dans le repère mentionné dans le sujet, on a $\overrightarrow{AF}(1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{BG}(0, 1, 1)$, d'où $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$.
3. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$. On le vérifie en injectant les coordonnées des points A, F et H dans l'équation $x + y - z = 0$.
4. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
   Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{n}(1, 1, -1)$, or $\overrightarrow{EC}(1, 1, -1)$. Par conséquent $\overrightarrow{EC}$ est normal à $\mathscr{P}$, et comme $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{EL}$ est de ce fait aussi normal à $\mathscr{P}$.
5. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$.
   On a $\overrightarrow{EC}(1, 1, -1)$ et $E(0, 0, 1)$; une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z & = & 1 - t \end{array}\right.$.

Le point L a donc pour coordonnées $L(t, t, 1-t)$, et comme $L \in \mathscr{P}$ alors : $t + t - (1-t) = 0$ d'où l'on tire $t = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $\boxed{L\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$, d'où le résultat.

IV

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$: $7x - 5y = 1$.
   (a) $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc $(3\,;\,4)$ est solution de (E).
   (b)
   - Le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (E) donc : $7 \times x - 5 \times y = 1$
     Le couple $(3\,;\,4)$ est solution de (E) donc : $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$
     Par soustraction membre à membre : $7(x-3) - 5(y-4) = 0$
     donc $\boxed{7(x-3) = 5(y-4)}$.
   - **Réciproquement**, si le couple $(x\,;\,y)$ est tel que $7(x-3) = 5(y-4)$, on peut dire que $7(x-3) - 5(y-4) = 0 \iff 7x - 21 - 5y + 20 = 0 \iff 7x - 5y = 1$, et donc que le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (E).
   - Donc le couple d'entiers $(x\,;\,y)$ est solution de (E) si et seulement si $\boxed{7(x-3) = 5(y-4)}$.

   (c)
   - Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers solution de (E), ce qui équivaut à $7(x-3) = 5(y-4)$.
     $7(x-3) = 5(y-4)$ entraîne que 7 divise $5(y-4)$; or 7 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y-4$. Donc il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 7k$ ce qui équivaut à $y = 7k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

     Comme $7(x-3) = 5(y-4)$ et $y - 4 = 7k$, cela implique que $7(x-3) = 5 \times 7k$ ce qui équivaut à $x - 3 = 5k$ ou encore $x = 5k + 3$.

     Donc si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5k+3 \\ y &=& 7k+4 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$
   - **Réciproquement**, si le couple d'entiers $(x\,;\,y)$ est tel que $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5k+3 \\ y &=& 7k+4 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $7x - 5y = 7(5k+3) - 5(7k+4) = 35k + 21 - 35k - 20 = 1$ donc $(x\,;\,y)$ est solution de (E).
   - Donc les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5k+3 \\ y &=& 7k+4 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. On sait que $7x - 5y = 1$.
   D'après la question **1**, on peut dire que $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$ avec k entier relatif. Le nombre de jetons est un nombre positif, et ne doit pas dépasser 25 qui est le nombre total de jetons dans la boîte.
   Pour $k = 0$, $x = 3$ et $y = 4$; il peut donc y avoir 3 jetons rouges, 4 jetons verts et $25 - 3 - 4 = \boxed{18}$ jetons blancs.
   Pour $k = 1$, $x = 8$ et $y = 11$; il peut donc y avoir 8 jetons rouges, 11 jetons verts et $25 - 8 - 11 = \boxed{6}$ jetons blancs.
   Les autres valeurs de k ne donnent pas de résultats répondant au problème.

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. Comme au départ c'est-à-dire pour $n = 0$, le pion est en A, on peut dire que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   D'après le texte, on tire au hasard un pion dans la boîte, donc il y a équiprobabilité. Il y a 3 pions rouges sur 25 donc la probabilité de tirer un pion rouge est $\frac{3}{25} = 0\boxed{,12}$. On calcule de même la probabilité de tirer un pion vert : $\frac{4}{25} = 016$ et la probabilité de tirer un pion blanc : $\boxed{\frac{18}{25} = 0,72}$.
   On cherche la probabilité a_{n+1} qu'à l'étape $n + 1$ le pion soit en A.

S'il était en A à l'étape n, il faut tirer une boule blanche pour qu'il y reste, ce qui se fait avec une probabilité de 0,72. Comme il avait une probabilité égale à a_n d'être en A à l'étape n, on retient $0,72a_n$.

S'il était en B à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à b_n d'être en B à l'étape n, on retient $0,12b_n$.

S'il était en C à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à c_n d'être en C à l'étape n, on retient $0,12c_n$.

On peut donc dire que : $\boxed{a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n}$.

On justifie de la même façon b_{n+1} et c_{n+1} et l'on a :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a_{n+1} &=& 0,72a_n &+& 0,12b_n &+& 0,12c_n \\ b_{n+1} &=& 0,12a_n &+& 0,72b_n &+& 0,16c_n \\ c_{n+1} &=& 0,16a_n &+& 0,16b_n &+& 0,72c_n \end{array}\right.}$$

ce qui donne sous forme matricielle

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}}$$

soit $X_{n+1} = X_n T$ où $T = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{10} & \dfrac{37}{110} & \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{10} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{11} & -\dfrac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$

   (a) On sait que $P = \left(P^{-1}\right)^{-1}$; on cherche donc à la calculatrice l'inverse de la matrice P^{-1} et on trouve :

   $$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}}$$

   (b) On va démontrer par **récurrence** sur n ($n \geqslant 1$) la propriété $\mathscr{P}_n$: $T^n = PD^nP^{-1}$.

   - On sait que $T = PDP^{-1}$ donc $T = PD^1P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
   - On suppose la propriété vraie à un rang p ($p \geqslant 1$), c'est-à-dire $T^p = PD^pP^{-1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

     On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $p+1$.

     $T^{p+1} = T^p \times T$; d'après l'hypothèse de récurrence, $T^p = PD^nP^{-1}$ et on sait que $T = PDP^{-1}$. Donc $T^{p+1} = PD^pP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^pP^{-1}PDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

   On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{T^n = PD^nP^{-1}}$.

   (c) La matrice D est une matrice diagonale ; $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ; ainsi $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

On admet que $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

(a) $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X_n = X_0 T^n \iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$$

Donc $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$. Or comme à chaque étape, le pion est soit en A, soit en B, soit en C, $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$.

(b) $a_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$; or $-1 < 0,6 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$ d'où l'on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{3}{10}$.

$b_n == \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$; or $-1 < 0,56 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,56^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$, on peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$.

$c_n = 1 - a_n - b_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1 - \dfrac{3}{10} - \dfrac{37}{110} = \dfrac{4}{11}$.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{3}{10} = \dfrac{33}{110}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{4}{11} = \dfrac{40}{110}$

Le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations est le sommet qui a la plus grande probabilité au rang n ; c'est donc le sommet C.