TS1-TS2 : correction du contrôle commun n° 3 (4 heures)

I

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.
Le graphique sera fait sur l'annexe (page 5).

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. $f\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) + 9 = 1 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 - 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} + 9 = \boxed{5}$
2. On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$:
   $f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0$; $\Delta = 4 - 16 = -12 = -\left(2\sqrt{3}\right)^2$
   Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$ et $\boxed{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$
   On appelle A le point d'affixe $z_A = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$
   $|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$
   Soit θ_A un argument de z_A : $\left.\begin{array}{l} \cos\theta_A = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta_A = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
   Donc $z_A = 2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$
   Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B = 2\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$
   $|z_A| = 2$ donc le point A se trouve sur le **cercle de centre O et de rayon 2**. De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la **droite d'équation $x = -1$**. Idem pour B.
   Voir graphique à la fin de l'exercice.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   $f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$
   Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.
   $\Delta = 4 - 4(9-\lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32$; $\Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \boxed{\lambda < 8}$
   L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $\boxed{]-\infty\,;\,8]}$.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\left|f(z) - 8\right| = 3$
   $f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$; donc $\left|f(z) - 8\right| = \left|(z+1)^2\right| = |z+1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.
   Donc $\left|f(z) - 8\right| = 3 \iff |z+1|^2 = 3 \iff \boxed{|z+1| = \sqrt{3}}$
   Soit Ω le point d'affixe -1, donc de coordonnées $(-1\,;\,0)$; si on appelle M le point d'affixe z, alors $|z+1| = \sqrt{3}$
   $\iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$.
   L'ensemble des points M vérifiant $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.
   On trace (F) sur le graphique (voir fin de l'exercice).
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   (a) $f(z) = z^2 + 2z + 9 = (x+\mathrm{i}y)^2 + 2(x+\mathrm{i}y) + 9 = x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + 2x + 2\mathrm{i}y + 9$
   $= \boxed{x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y)}$
   (b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   $f(z)$ réel $\iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = -1$
   Donc (E) est la $\boxed{\text{réunion de deux droites } D_1 \text{ d'équation } y = 0 \text{ (l'axe des abscisses) et } D_2 \text{ d'équation } x = -1}$.
6. Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$. Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\left(-1-\sqrt{3}\,;\,0\right)$ et $\left(-1+\sqrt{3}\,;\,0\right)$.
   Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1 ; donc A et B sont situés sur la droite D_2.

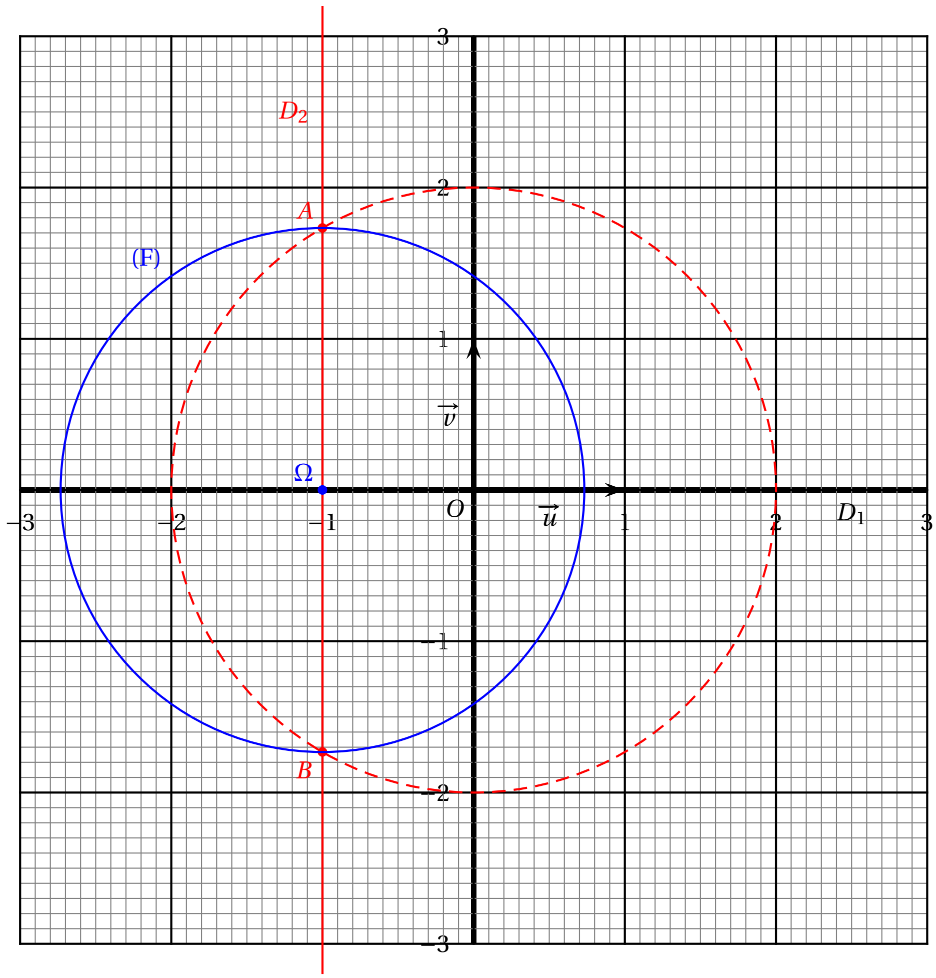
$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|-1 + \imath\sqrt{3} + 1\right| = \left|\imath\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point A appartient au cercle (F).

$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = \left|-1 - \imath\sqrt{3} + 1\right| = \left|-\imath\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point B appartient au cercle (F).

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont :

$\left(-1-\sqrt{3}\,;0\right)$, $\left(-1+\sqrt{3}\,;0\right)$, $\left(-1\,;\sqrt{3}\right)$ et $\left(-1\,;-\sqrt{3}\right)$

FIGURE DE L'EXERCICE I



II

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ (unité graphique 5 cm).

Partie A

Soit la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative.

1. Pour tout $x > 0$, $f_1'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x^2} + x \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = \boxed{(1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}}$.

   $f_1'(x)$ est donc du signe de $1-2x^2$.

   $1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $1-2x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$ (ouisque x est positif).

   On en déduit que f_1 est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\,+\infty\right[$.

2. Calcul de la limite de f_1 en $+\infty$:

   On pose $u = x^2$ donc $x = \sqrt{u}$.

   Alors $x\mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u} = \dfrac{1}{\sqrt{u}} \times u\mathrm{e}^{-u}$.

$\lim\limits_{x \to =\infty}\left(x\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \lim\limits_{u \to +\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{u}} \times u\mathrm{e}^{-u}\right]$.

$\lim\limits_{u \to +\infty} u\mathrm{e}^{-u} = \lim\limits_{u \to +\infty}\left(\dfrac{u}{\mathrm{e}^u}\right) = 0$ car, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{u \to +\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}\right) = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{u \to +\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right) = 0$, par produit, on trouve que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0}$.

On en déduit que l'axe des abscisses est **asymptote** à la courbe $\mathscr{C}_1$ au voisinage de $+\infty$.

3. **Tableau de variation de $\mathbf{f_1}$** :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$	$\searrow$	0

4. $\forall x \geqslant 0$, $f_1(x) - x = x\mathrm{e}^{-x^2} - x = x\left(\mathrm{e}^{-x^2} - 1\right)$.

   $x \geqslant 0$ donc $-x^2 \leqslant 0$ d'où $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$ donc $\mathrm{e}^{-x^2} - 1 \leqslant 0$.

   On en déduit que $f_1(x) - x \leqslant 0$.

   La courbe $\mathscr{C}$ est donc en dessous de la droite Δ.

Partie B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_3(x) = x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ et on appelle $\mathscr{C}_3$ sa courbe représentative.

1. Pour tout $x \geqslant 0$, $f_3(x) = 3x^2\mathrm{e}^{-x^2} + x^3 \times \left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \boxed{x^2\left(3 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}}$ qui est du signe de $3 - 2x^2$.

   $3 - 2x^2$ s'annule pour $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $3 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x < \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (car x est positif).'Òn en déduit que f_3 est **croissante** sur $\left[0\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right]$ puis **décroissante** sur $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,;\,+\infty\right[$

2. Pour tout $x \geqslant 0$, $f_3(x) - f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x^2} - x^2\mathrm{e}^{-x^2} = x\left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$ qui est du signe de $x^2 - 1$, donc positif pour $x \geqslant 1$ (car x est positif).

   La courbe $\mathscr{C}_3$ est donc au-dessus de $\mathscr{C}_1$ pour $x \geqslant 1$ et en dessous pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ (avec un point commun pour $x = 0$ ou $x = 1$).

3. Tracé de $\mathscr{C}_3$ sur la courbe à la fin de l'exercice.

Partie C

On désigne par n un entier naturel n non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x^2}$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative.

1. Pour tout $x \geqslant 0$, f_n est dérivable come produit et quotient de fonctions dérivables.

   $\forall x \geqslant 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} \times \mathrm{e}^{-x^2} + x^n \times \left(-2x\mathrm{e}^{-x^3}\right) = \boxed{x^{n-1}\left(n - 2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}}$.

   $f_n'(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

   $f_n'(x)$ est du signe de $n - 2x^2$, donc positif sur $\left[0\,;\,\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ et négatif sur $\left[\dfrac{\sqrt{n}}{2}\,;\,+\infty\right[$.

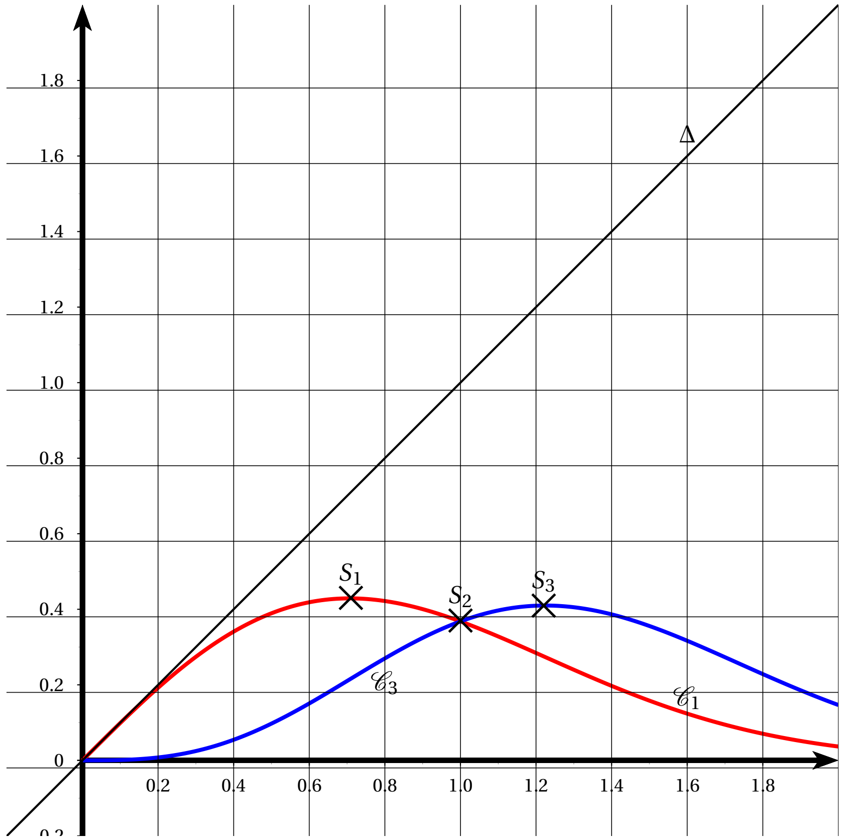
   f_n est donc croissante sur $\left[0\,;\,\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{n}}{2}\,;\,+\infty\right[$

2. On appelle S_n le point de $\mathscr{C}_n$ d'abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$, c'est-à-dire le sommt de la coourbe.

   L'abscisse de S_2 est 1. Pour tout n, $f_n(1) = 1^n\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   Pour tout n, $\mathscr{C}_n$ passe par S_2.

   Placer S_1, S_2 et S_3 sur la figure.



III

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0.$$

1. Le point A(1 ; 1 ; 1) appartient au plan P_m si et seulement si $\frac{1}{4}m^2x_{\text{A}}+(m-1)y_{\text{A}}+\frac{1}{2}mz_{\text{A}}-3=0 \iff \frac{1}{4}m^2+(m-1)+\frac{1}{2}m-3=0$

   $\iff \frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m-4=0 \iff m^2+6m-16=0$

   $\Delta=36+64=100$ donc cette équation admet 2 solutions $m'=\frac{-6+10}{2}=2$ et $m''=\frac{-6-10}{2}=-8$.

   Le point A appartient au plan P_m pour $\boxed{m=-8 \text{ ou } m=2}$.

2. Le plan P_1 a pour équation $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}z-3=0$ ou encore $x+2z-12=0$ en multipliant tout par 4.

   Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$.

   On cherche l'intersection de ces deux plans :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z-12 &=& 0\\ 4x-5y-2z-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -4(12-2z)+2z+3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -48+8z+2z+3\end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -45+10z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ y &=& 9-2z\end{array}\right.$$

   En posant $z=t$, on peut dire que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

3. (a) Le plan P_0 a pour équation $-y-3=0$.

Pour déterminer l'intersection du plan P_0 et de la droite (d), on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\\ -y-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ -3 &=& 9-2t\\ z &=& t\\ y &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ t &=& 6\\ z &=& t\\ y &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& -3\\ z &=& 6\\ t &=& 6\end{array}\right.$$

L'intersection du plan P_0 et de la droite (d) est donc le point $\boxed{B(0\,;\,-3\,;\,6)}$.

(b) Le plan P_m a pour équation $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$.

On regarde si les coordonnées du point B vérifient l'équation du plan P_m :

$\frac{1}{4}m^2x_B+(m-1)y_B+\frac{1}{2}mz_B-3=0+(m-1)(-3)+\frac{1}{2}m\times 6-3=-3m+3+3m-3=0$

Donc le point B **appartient au plan P_m**, quelle que soit la valeur du réel m.

(c) Soit H $(a\,;\,b\,;\,c)$ un point qui appartient au plan P_m pour tout réel m.

Cela signifie que les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan pour tout réel m :

$\frac{1}{4}m^2a+(m-1)b+\frac{1}{2}mc-3=0$

On donne à m des valeurs particulières :

- Pour $m=0$, on obtient $-b-3=0$ donc $b=-3$.
- Pour $m=2$, on obtient $a+(2-1)(-3)+c-3=0$, soit $a+c=6$.
- Pour $m=-2$, on obtient $a+(-2-1)(-3)-c-3=0$, soit $a-c=-6$.

On résout le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+c &=& 6\\ a-c &=& -6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& 0\\ a+c &=& 6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0\\ c &=& 6\end{array}\right.$

Le point H a donc pour coordonnées $(0\,;\,-3\,;\,6)$ donc c'est le point B.

Le point B est l'unique point appartenant à tous les plans P_m quelle que soit la valeur de m.

Autre méthode géométrique :

L'existence du point a été montrée en 3. b. Nous allons montrer son unicité.

On sait (question 2) que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d).

On sait (question 3. a.) que P_0 et (d) sont sécants en B.

Le point B est donc l'unique point appartenant à P_0, P_1 et P_{-4}.

Si un point appartient à P_m quel que soit m réel, alors il appartient en particulier à P_0, P_1 et P_{-4}. C'est donc l'unique point B.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \leqslant m \leqslant 10 \text{ et } -10 \leqslant m' \leqslant 10$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

(a) Le plan P_1 a pour équation $x+2z-12=0$ donc pour vecteur normal $\vec{n}_1\ (1\,;\,0\,;\,2)$.

Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$ donc pour vecteur normal $\vec{n}_{-4}\ (4\,;\,-5\,;\,-2)$.

$\vec{n}_1.\vec{n}_{-4}=1\times 4+0+2\times(-2)=0$ donc les vecteurs sont orthogonaux.

Les plans P_1 et P_{-4} sont donc perpendiculaires.

(b) Le plan P_m a pour équation $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$ donc pour vecteur normal $\vec{n}\left(\frac{1}{4}m^2\,;\,m-1\,;\,\frac{1}{2}m\right)$.

Le plan $P_{m'}$ a pour équation $\frac{1}{4}m'^2x+(m'-1)y+\frac{1}{2}m'z-3=0$ donc pour vecteur normal $\vec{n}'\left(\frac{1}{4}m'^2\,;\,m'-1\,;\,\frac{1}{2}m'\right)$.

les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux :

$$P_m\perp P_{m'} \iff \vec{n}\perp\vec{n}' \iff \vec{n}.\vec{n}'=0 \iff \frac{1}{4}m\times\frac{1}{4}m'+(m-1)(m'-1)+\frac{1}{2}m\times\frac{1}{2}m'=0$$
$$\iff \left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0$$

(c) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\left(mm'\right)^2 + 16(m-1)\left(m'-1\right) + 4mm' = 0$
	Alors Afficher $\left(m\ ;\ m'\right)$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Cet algorithme affiche tous les couples $(m\,;\ m')$ d'entiers compris entre -10 et 10 pour lesquels $\left(\dfrac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)\left(m'-1\right) + \dfrac{mm'}{4} = 0$, c'est-à-dire pour lesquels les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

(d) Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1)$ et $(5\ ;\ -4)$.
Le nombres m et m' jouant le même rôle, les autres couples seront $(1\ ;\ -4)$, $(1\ ;\ 0)$ et $(-4\ ;\ 5)$.
Les six couples seront affichés dans cet ordre :

$$(-4\ ;\ 1)\ ;\ (-4\ ;\ 5)\ ;\ (0\ ;\ 1)\ ;\ (1\ ;\ -4)\ ;\ (1\ ;\ 0)\ ;\ (5\ ;\ -4)$$

IV

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

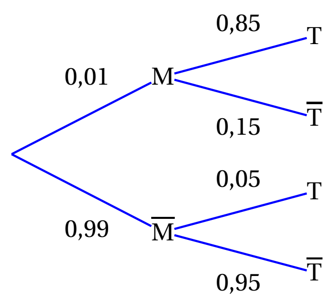
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. 

2. (a) On suit la première branche : la probabilité est égale à
$p(M \cap T) = p(\text{M}) \times p_{\text{M}}(\text{T}) = 0,01 \times 0,85 = \boxed{0,0085}$.

   (b) La probabilité qu'il soit non porteur de la maladie et que son test soit positif (troisième branche) est égale à $0,99 \times 0,05 = \boxed{0,0495}$.

   On a donc $p(\text{T}) = p(\text{M}) \times p_{\text{M}}(\text{T}) + p\left(\overline{\text{M}}\right) \times p_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = 0,0085 + 0,0495 = \boxed{0,058}$.

3. Il faut calculer $p_{\text{T}}(\text{M}) = \dfrac{p(\text{M} \cap \text{T})}{p(\text{T})} = \dfrac{0,0085}{0,058} \approx \boxed{0,1466}$.

4. (a) On a ici un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,058$.
$\boxed{\text{X suit donc la loi binomiale } \mathscr{B}(5\ ;\ 0,058)}$.
La probabilité que k animaux aient un test positif est égale à :

$$\boxed{p(X = k) = \binom{5}{k} \times 0,058^k \times (1 - 0,058)^{5-k}}.$$

(b) $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - (1-0,058)^5 = 1 - 0,942^5 \approx 0,25823$.
La probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif est donc : $\boxed{0,2583}$.

5.

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

(a) On a d'après les données du tableau :
$\mathrm{E} = 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,0580 + 1000 \times 0,0015 = 5,80 + 1,50 = \boxed{7,30\text{ €}}$.
Ceci représente le coût moyen par animal

(b) Pour 200 bêtes, le coût sera en moyenne de :

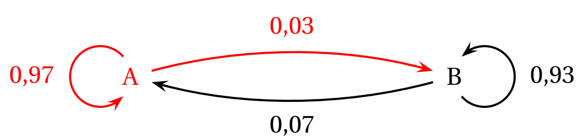
$$200 \times 7,30 = \boxed{1460\text{ €}}.$$

IV (spécialité)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On décrit la situation précédente à l'aide d'un graphe en appelant A l'état « être sain » et B l'état « être défaillant » :



2. $a_1 = 0,97a_0 + 0,07b_0 = 0,97 \times 0,4 + 0,07 \times 0,6 = 0,43$
$b_1 = 0,03a_0 + 0,93b_0 = 0,03 \times 0,4 + 0,93 \times 0,6 = 0,57$

3. D'après le texte, on peut dire que $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,97\,a_n + 0,07\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,03\,a_n + 0,93\,b_n \end{array}\right.$

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

(a) La traduction matricielle du système précédent, est :
$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$
ou encore $X_{n+1} = AX_n$.

(b) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $X_n = A^n X_0$.

- **Initialisation**
Pour $n = 0$, $A^n = A^0 = I_2$ la matrice identité d'ordre 2.
$A^0 \times X_0 = I_2 \times X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**
On suppose la propriété vraie à un rang $p \geqslant 0$; on va démontrer qu'elle est vraie au rang $p+1$.
On a comme hypothèse que $X_p = A^p X_0$.
$X_{p+1} = A \times X_p = A \times \left(A^p X_0\right) = \left(A \times A^p\right) \times X_0 = A^{p+1} X_0$
Donc la propriété est démontrée pour le rang $p+1$.
- **Conclusion**
La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

(c) $X_{30} = A^{30} X_0 \approx \begin{pmatrix} 0,687 \\ 0,313 \end{pmatrix}$
Au bout de 30 jours, il y a 68,7 % d'appareils sains, et 31,3 % d'appareils défectueux.

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.

   (a) Au bout de $n+1$ jours, un appareil est soit sain soit défectueux; la proportion d'appareils sains est a_{n+1} et la proportion d'appareil défectueux est b_{n+1} donc $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

   (b) On a vu que
   $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,97\,a_n + 0,07\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,03\,a_n + 0,93\,b_n \end{array} \right.$;

   or, pour tout n, $a_n + b_n = 1$, donc $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,97\,a_n + 0,07\,(1 - a_n) \\ b_{n+1} & = & 0,03\,(1 - b_n) + 0,93\,b_n \end{array} \right.$

   ce qui équivaut à $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,9\,a_n + 0,07 \\ b_{n+1} & = & 0,9\,b_n + 0,03 \end{array} \right.$

   $DX_n + B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n \\ 0,9b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 0,07 \\ 0,9b_n + 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

2. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - 10B$, donc $X_n = Y_n + 10B$.

   (a) $Y_{n+1} = X_{n+1} - 10B = DX_n + B - 10B = D\,(Y_n + 10B) - 9B = DY_n + 10DB - 9B$
   $10D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_2$ donc $10DB - 9B = 9I_2B - 9B = 9B - 9B = 0$
   Donc $Y_{n+1} = DY_n$.

   (b) On admet que pour tout entier naturel n, $Y_n = D^n\,Y_0$.
   Donc $X_n = Y_n + 10B = D^n\,Y_0 + 10B = D^n\,(X_0 - 10B) + 10B$.

   (c) $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ donc $D = 0,9I_2$;

   on a donc $D^n = 0,9^n\,I_2^n = 0,9^n\,I_2 = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix}$

   $X_0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$ donc $10B = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

   $$\begin{aligned} X_n = D^n\,(X_0 - 10B) + 10B &\iff X_n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} \\ &\iff X_n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} \\ &\iff X_n = \begin{pmatrix} -0,3 \times 0,9^n \\ 0,3 \times 0,9^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} \\ &\iff X_n = \begin{pmatrix} -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \\ 0,3 \times 0,9^n + 0,3 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \\ b_n & = & 0,3 \times 0,9^n + 0,3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

3. La proportion d'ordinateurs défaillants est b_n et on cherche $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.
   Or $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ et on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0,3$.
   Sur le long terme, on peut dire que la proportion d'ordinateurs défaillants va tendre vers 30 %.