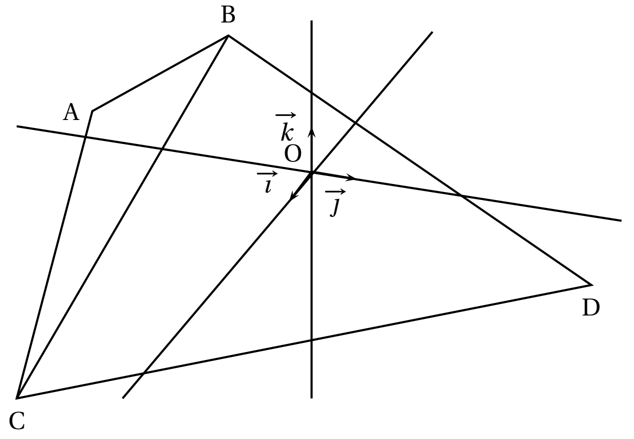
TS1-TS2 : contrôle commun n° 2 (4 heures)

Les exercices I, III et IV sont communs à tout le monde, l'exercice II est à choisir selon que l'élève suit ou non l'enseignement de spécialité

Exercice 1 (5points)



Partie A

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$.

   Le repère étant orthonormal on peut calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9+0-9=0$: les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, le triangle ABC est **rectangle** en A. (1 pt)

2. Le plan (P) a un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; donc $\vec{n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; les vecteurs sont colinéaires donc la droite (AB) est **orthogonale** au plan (P).

   Or A(3 ; −2 ; 2) ∈ (P) $\iff 3-2+2-3=0$; cette égalité est vraie, donc (P) est orthogonal à la droite (AB) et contient le point A. (0,5 pt)

3. $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan P′, donc une équation de ce plan est de la forme $3x-3z+d=0$.

   Or $A \in (P') \iff 3\times3-3\times2+d=0 \iff d=-3$.

   Donc $M(x\,;\,y) \in (P') \iff 3x-3z-3=0 \iff \boxed{x-z-1=0}$. (0,5 pt)

4. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in P\cap P' \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3 &=& 0\\ x-z-1 &=& 0\end{array}\right.$

   En posant $z=t$ réel quelconque on obtient le système :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3 &=& 0\\ x-z-1 &=& 0\\ z &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+t-3 &=& 0\\ x-t-1 &=& 0\\ z &=& t\end{array}\right. \iff$$

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+t-3 &=& 0\\ x &=& t+1\\ z &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t+1+y+t-3 &=& 0\\ x &=& t+1\\ z &=& t\end{array}\right. \iff$$

   $$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+1\\ y &=& -2t+2\\ z &=& t\end{array}\right. \iff M(x\,;\,y\,;\,z)\in P\cap P'}$$

   (1 pt)

Partie B

1. On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

   On a $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = -9+18-9=0$: les vecteurs sont **orthogonaux**.

   De même $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = -9+0-9=0$: les vecteurs sont **orthogonaux**.

   Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABC, donc la droite (AD) est **orthogonale** à ce plan. (1 pt)

2. En prenant ABC pour base et D comme sommet, [AD] est hauteur de ce tétraèdre. Le volume V du tétraèdre est donc égal à $\dfrac{\text{aire(ABC)} \times \text{AD}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \text{AB} \times \text{AC} \times \text{AD}}{3}$.
Or $\text{AB}^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 3 \times 9$, donc $\text{AB} = 3\sqrt{3}$;
$\text{AC}^2 = 3^2 + 3^2 = 2 \times 9$, donc $\text{AC} = 3\sqrt{2}$
$\text{AD}^2 = 9 + 36 + 9 = 3\sqrt{6}$.
$V = \dfrac{\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{3} = \dfrac{27 \times 3}{3} = 27$. $\boxed{V = 27}$ (0,5 pt)

3. $\overrightarrow{\text{DB}}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\text{DC}}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit : $\text{DB} = \sqrt{81} = 9$; $\text{DC} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
Or $\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DC}} = DB \times DC \times \cos \widehat{BDC}$ donc $\cos \widehat{BDC} = \dfrac{\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DC}}}{DB \times DC} = \dfrac{54}{54\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\boxed{\widehat{BDC} = \dfrac{\pi}{4}}$.
Conclusion : l'angle $\widehat{\text{BDC}}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian. (0,5 pt)

4. (a) L'aire du triangle BDC est égale à $\dfrac{1}{2} \times \text{DB} \times \text{DC} \times \sin \widehat{\text{BDC}} = \dfrac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 9 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 27$. (unités d'aire) (0,5 pt)
   (b) On considère maintenant le tétraèdre ABDC de base (BDC) et dont la hauteur de mesure h est issue de A.
   On a $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire(BDC)} \times h \iff 27 = \dfrac{1}{3} \times 27 \times h \iff \boxed{h = 3}$. (0,5 pt)

Exercice II (5points)

*(pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité)*

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$.
On appelle :

- $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$,
- $\mathscr{Q}$ le plan d'équation $3x + y - z = 0$,
- Δ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -4 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
Le vecteur $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
$\vec{u} \cdot \vec{k} = 0$ donc $\mathscr{D}$ est **parallèle** au plan $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$. (1 pt)

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectivement à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles et sont donc sécants suivant une droite $\mathscr{D}$.
Tout point commun à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ a des coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$ qui vérifient le système : $\begin{cases} 2x - y & = & -5 \\ 3x + y - z & = & 0 \end{cases}$
En posant $x = \alpha$, le système devient : $\begin{cases} x & = & \alpha \\ 2x - y & = & -5 \\ 3x + y - z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & \alpha \\ y & = & 2\alpha + 5 \\ z & = & 5\alpha + 5 \end{cases}$ (1 pt)

3. - **Affirmation 1** :$\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{R}$ si un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est orthogonal à un vecteur normal à $\mathscr{R}$ c'est-à-dire si $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff -5 + 10 - 5 = 0$ qui est bien vrai.

- Deux droites sont coplanaires si elles ont un point commun ou si elles sont parallèles.
  $\mathscr{D}$ est donc parallèle au plan $\mathscr{R}$. (1 pt)

  $\star$ **Affirmation 2 :** Si elles sont sécantes c'est-à-dire si $\left\{\begin{array}{lll}\alpha & = & -3\beta \\ 2\alpha+5 & = & 1+\beta \\ 5\alpha+5 & = & 2+2\beta\end{array}\right. \iff$

  $\left\{\begin{array}{lll}\alpha & = & -3\beta \\ -6\beta+5 & = & 1+\beta \\ -15\beta+5 & = & 2+2\beta\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll}\alpha & = & -3\beta \\ \beta & = & \dfrac{4}{7} \\ \beta & = & \dfrac{5}{17}\end{array}\right.$

  Ce système n'a pas de solution.
  Conclusion : les deux droites ne sont pas sécantes.
  $\star$ Si elles sont parallèles leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

  $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$) et $\mathscr{D}'$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$.

  Ces vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires. Donc les droites ne sont pas parallèles.
  Conclusion : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires. (2 pt)

Exercice III (5 points)

1. (a) On effectue une démonstration par récurrence :
   Initialisation : on a $u_0 = 1,\ u_1 = -\dfrac{1}{2},\ u_2 = -\dfrac{1}{4}$ et $u_3 = \dfrac{7}{8} \geqslant 0$.
   La relation est vraie au rang 3.
   Hérédité soit un naturel $n,\ n \geqslant 3$, et supposons que $u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$. Or $n \geqslant 3 \iff n-1 \geqslant 2$, donc $u_{n+1} \geqslant 2 > 0$. L'hérédité est démontrée.
   La relation est vraie au rang 3, et si elle est vraie à un rang au moins égal à 3 elle est vraie au rang suivant ; on a donc démontré par récurrence que pour $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$. (1 pt)

   (b) $n \geqslant 4 \iff n-1 \geqslant 3$; d'après a, $u_{n-1} \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{2}u_{n-1} \geqslant 0 \Rightarrow$ (1 pt)
   $\dfrac{1}{2}u_{n-1} + n - 2 \geqslant n-2 \iff \dfrac{1}{2}u_{n-1} + (n-1) - 1 \geqslant n-2 \iff u_n \geqslant n-2.$

   (c) Par comparaison, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. (0,5 pt)

2. (a) $v_n = 4u_n - 8n + 24 \Rightarrow v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 =$
   $4\left(\dfrac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8(n+1) + 24 = 2u_n + 4n - 4 - 8n - 8 + 24 = 2u_n - 4n + 12 = \dfrac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \dfrac{1}{2}v_n.$
   On a donc démontré que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. La raison étant inférieure à 1, cette suite est décroissante. De plus
   $v_0 = 4u_0 + 24 = 28.$ (0,5 pt)

   (b) On a immédiatement $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 28 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 4u_n - 8n + 24 \iff 4u_n = 28 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 8n - 24 \iff u_n =$
   $7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6.$

   (c) On a donc $u_n = \underbrace{7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}_{\text{suite géométrique}} + \underbrace{2n-6}_{\text{suite arithmétique}} = x_n + y_n$ où (x_n) est la suite (v_n) au facteur 4 près et la suite (y_n) est définie par $y_n = 2n - 6$, suite arithmétique de raison 2 et de premier terme -6. (0,5 pt)

   (d) On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k.$
   Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = \dfrac{7 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 14\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 14 - 7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$
   D'autre part $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k = \dfrac{(n+1)(-6+2n-6)}{2} = (n+1)(n-6).$
   Finalement $\boxed{S_n = n^2 - 5n + 8 - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.}$ (1 pt)

Exercice IV **(5 points)**

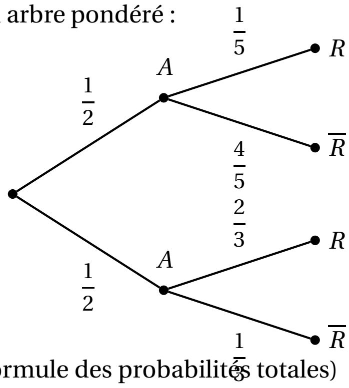
On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.
On note A l'événement « l'urne a est choisie » , B l'événement « l'urne b est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».
On note p_{A} (R) la probabilité conditionnelle de l'événement R par rapport à l'événement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

   (a) $\boxed{p(A) = \frac{1}{2}}$ (puisque le choix de l'urne se fait au hasard).

   $\boxed{p_A(R) = \frac{1}{5}}$ et $p(A \cap R) = p_A(R) \times p(A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{10}}$ (0,75 pt)

   (b) Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré : (0,25 pt)

   (c) $p(R) = p_A(R) \times p(A) + p_B(R) \times p(B)$ (formule des probabilités totales)

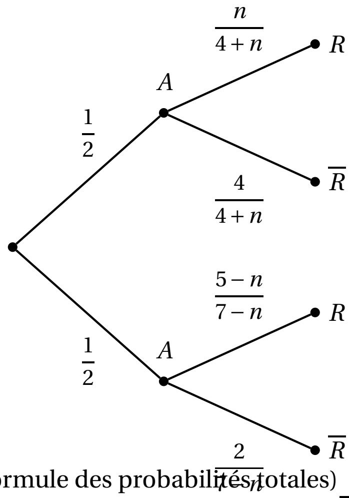
   $= \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{3+10}{30} = \boxed{\frac{13}{30}}$ (0,5 pt)

   (d) $p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}} = \boxed{\frac{3}{13}}$ (1 pt)

2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5-n$.
   On remarque que c'est une généralisation de la situation précédente.

   (a) $p(A)(R) = \frac{n}{4+n}$; $p_B(R) = \frac{5-n}{7-n}$. (0,5 pt)

   (b) Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré : (0,25 pt)

   (c) $p(R) = p_A(R) \times p(A) + p_B(R) \times p(B)$ (formule des probabilités totales)

   $= \frac{n}{4+n} \times \frac{1}{2} + \frac{5-n}{7-n} \times \frac{1}{2} = \frac{n(7-n)+(5-n)(4+n)}{2(4+n)(7-n)} = \frac{-2n^2+8n+20}{2(4+n)(7-n)} = \boxed{\frac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}}$. (1 pt)

   (d) On sait que n est un entier inférieur ou égal à 5. n ne prend donc que six valeurs entières. On renseigne un tableau de valeurs :

n	0	1	2	3	4	5
$\dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$	$0,357$	$0,433$	$0,467$	$0,464$	$0,417$	$0,278$

La plus grande valeur possible de $p(\mathrm{R})$ a lieu pour $n = 2$, donc avec quatre boules blanches et deux boules rouges dans l'urne a et deux boules blanches et trois boules rouges dans l'urne b. (0,75 pt)

Exercice II (5 points)

*(pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité)*

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel
	b est un entier naturel
	c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0
	Demander la valeur de a
	Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a \geqslant b$
	Affecter à c la valeur $c+1$
	Affecter à a la valeur $a-b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher c
	Afficher a

1. En faisant tourner l'algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$, on obtient :

Variables	a	b	c
Initialisation			0
Entrées	13	4	0
Traitement	9	4	1
	5	4	2
	1	4	3
Sortie	On affiche la valeur de c : 3		
	On affiche la valeur de a : 1		

2. Dans cet algorithme, on retire le nombre b du nombre a autant de fois que l'on peut et on fait afficher le nombre de fois que l'on a retiré b et ce qui reste dans a ; cet algorithme fournit donc le quotient (dans c) et le reste (dans a) de la division de a par b.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. On va coder la lettre U.
   Étape 1 : La lettre U correspond à $m = 20$.
   Étape 2 : $9m+5 = 9\times 20+5 = 185$; le reste de la division de 185 par 26 est $p = 3$.
   Étape 3 : Au nombre $p = 3$, on associe la lettre D.
   Donc la lettre U se code en D.
2. On modifie l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent :

Variables :	m est un entier naturel
	p est un entier naturel
Initialisation :	Demander la valeur de m
	Affecter à p la valeur $9m+5$
Traitement :	Tant que $p \geqslant 26$
		Affecter à p la valeur $p-26$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher p

Partie C

1. On sait que $9 \times 3 = 27 \equiv 1\ [26]$; donc pour $x = 3$, on a $9x \equiv 1\ [26]$.
2. $9m+5 \equiv p\ [26] \Longrightarrow 27m+15 \equiv 3p\ [26] \iff 27m \equiv 3p-15\ [26]$

   Or $27 \equiv 1\ [26]$ donc $27m \equiv m\ [26]$

   $$\left.\begin{array}{l}27m \equiv 3p-15\\ 27m \equiv m\ [26]\end{array}\right\} \Longrightarrow m \equiv 3p-15\ [26]$$

   Réciproquement :

   $m \equiv 3p-15\ [26] \iff m+15 \equiv 3p\ [26] \Longrightarrow 9m+135 \equiv 27p\ [26]$

   Or $27 \equiv 1\ [26]$ donc $27p \equiv p\ [26]$; de plus $135 = 5 \times 26 + 5$ donc $135 \equiv 5\ [26]$.

   $135 \equiv 5\ [26] \Longrightarrow 9m+135 \equiv 9m+5\ [26]$

   $$\left.\begin{array}{ll}9m+135 & \equiv 9m+5\ [26]\\ 27p & \equiv p\ [26]\\ 9m+135 & \equiv 27p\ [26]\end{array}\right\} \Longrightarrow 9m+5 \equiv p\ [26]$$

   On peut donc dire que : $9m+5 \equiv p\ [26] \iff m \equiv 3p-15\ [26]$.
3. Pour décoder une lettre, on procèdera donc ainsi :

   Étape 1 : À la lettre que l'on veut décoder, on associe le nombre p correspondant dans le tableau.

   Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $3p-15$ par 26 et on le note m.

   Étape 3 : Au nombre m, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

   Pour décoder la lettre B :

   Étape 1 : À la lettre B, on associe le nombre $p = 1$.

   Étape 2 : $3p-15 = -12 \equiv 14\ [26]$ donc $m = 14$.

   Étape 3 : Au nombre $m = 14$, on associe la lettre O.

   Donc la lettre B se décode en la lettre O.