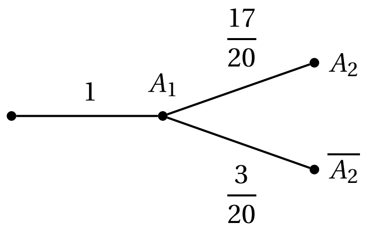
TS2 : correction du devoir sur table nº 2 bis (4 heures)

Exercice I

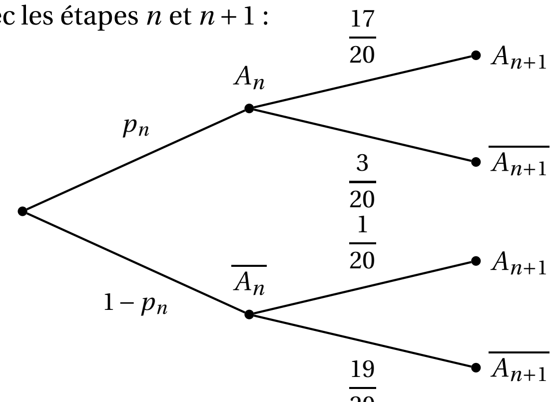
Notons A_n l'événement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.

1. Arbre correspondant au début :



$p_2 = p(A_2) = \frac{17}{20} = 0,85$. $\boxed{p_2 = 0,85}$. (0,5 pt)

2. Représentons un arbre avec les étapes n et $n+1$:



$A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (\overline{A_n} \cap A_{n+1})$. C'est une réunion d'événements incompatibles donc :
$p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = p_{A_n}(A_{n+1})p(A_n) + p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})p(\overline{A_n})$
$= \frac{17}{20}p_n + \frac{1}{20}(1-p_n) = \frac{16}{20}p_n + \frac{1}{20} = 0,8p_n + 0,05$.
Pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05}$. (1 pt)

3. On trouve $\boxed{p_3 = 0,73}$. (0,5 pt)

4. (a) Effectuons une démonstration par récurrence :
   soit $(\mathscr{H}_n)$ l'hypothèse de récurrence : $p_n > 0,25$.
   - Amorçage : $p_1 = 1 > 0,25$ donc $(\mathscr{H}_1)$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons que $(\mathscr{H}_n)$ soit vraie pour un entier n.
     Par conséquent : $p_n > 0,25$.
     Alors : $0,8p_n > 0,8 \times 0,25 = 0,2$ donc $0,8p_n + 0,05 > 0,2 + 0,05 = 0,25$ et
     $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05 > 0,25$.
     $(\mathscr{H}_{n+1})$ est donc vraie.
     La propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie our tout n non nul.
   $\boxed{\text{Pour tout } n,\ p_n > 0,25}$. (1 pt)

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = 0,8p_n + 0,05 - p_n = -0,2p_n + 0,05$.
   $p_n > 0,5 \Leftrightarrow -0,2p_n < -0,2 \times 0,05 \Leftrightarrow -0,2p_n < -0,05 \Leftrightarrow -0,2p_n + 0,05 < 0$. Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$. $\boxed{\text{La suite } (p_n) \text{ est donc décroissante.}}$ (1 pt)

   (c) La suite (p_n) est décroissante et minorée :
   $\boxed{\text{elle converge donc vers un réel } \ell}$. $(\ell \geqslant 0,25)$ (0,5 pt)

   (d) On a $p_{n+1} = f(p_n)$ avec $f(x) = 0,8x + 0,2$.
   D'après le rappel, ℓ est solution de l'équation $\ell = f(\ell)$.
   On résout l'équation et l'on trouve : $0,2\ell = 0,05$ donc $\ell = \frac{0,05}{0,2} = 0,25$.
   $\boxed{\text{La suite } (p_n) \text{ converge vers 0,25.}}$ (0,5 pt)

Exercice II

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées : $A\left(1\,;\,-\sqrt{3}\,;\,0\right)$; $B\left(1\,;\,\sqrt{3}\,;\,0\right)$; $C(-2\,;\,0\,;\,0)$; $D\left(0\,;\,0\,;\,2\sqrt{2}\right)$

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$;

   le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les trois points A, B, D définissent un plan.
   La relation $4x+z\sqrt{2}=4$ est de la forme $ax+by+cz=d$, c'est donc une équation d'un plan $\mathscr{P}$.
   - $4x_A+z_A\sqrt{2}=4\times1=4$ donc $A\in\mathscr{P}$
   - $4x_B+z_B\sqrt{2}=4\times1=4$ donc $B\in\mathscr{P}$
   - $4x_D+z_D\sqrt{2}=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$ donc $D\in\mathscr{P}$

   Donc $\mathscr{P}$ est le plan (ABD) qui a pour équation $\boxed{4x+z\sqrt{2}=4}$. (1 pt)

2. On note $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\sqrt{2}\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

   (a) En prenant $t=0$, on trouve $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$ donc le point O appartient à $\mathscr{D}$.

   La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}=2\vec{u}$ ce qui entraîne que la droite $\mathscr{D}$ est **parallèle** à (CD). (1 pt)

   (b) Le point G d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABD) a des coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ qui vérifient : $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\sqrt{2}\\4x+z\sqrt{2}=4\end{cases}$

   Donc $4t+t\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4\iff 6t=4\iff t=\dfrac{2}{3}$.

   Le point G a pour coordonnées $\boxed{\left(\dfrac{2}{3}\,;\,0\,;\,\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$. (1 pt)

3. (a) On note L le milieu du segment [AC] ;

   L a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_C}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_C}{2}\,;\,\dfrac{z_A+z_C}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,0\right)$

   Le vecteur $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\\-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix}$; le vecteur $\overrightarrow{BO}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$.

   Donc $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BO}$; les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont **colinéaires** donc les points B, O et L sont alignés.

   Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$.

On calcule le produit scalaire de $\overrightarrow{BL}$ et de $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{BL}.\overrightarrow{AC} = -\dfrac{3}{2} \times (-3) + \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt{3} + 0 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{9}{2} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

On peut donc dire que **la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC)**. (1 pt)

(b) La droite (BL) passe par le milieu de [AC] et est perpendiculaire à (AC) donc c'est la médiatrice de [AC], donc BA = BC.

- $BA^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 12$
- $CA^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_Z)^2 = (1+2)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 3 = 12$

Donc $BA^2 = CA^2$ donc BA = CA.

On peut en déduire que le triangle ABC est **équilatéral**.

Donc le centre de son cercle circonscrit est aussi son centre de gravité; il est situé aux $\dfrac{2}{3}$ d'une médiane en partant du sommet.

Or on a vu que $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BO}$ donc on peut en déduire que le point O est le **centre du cercle circonscrit au triangle ABC**. (1 pt)

4. On a déjà vu que $AB = AC = BC = \sqrt{12}$; on calcule les longueurs des autres arêtes du tétraèdre :
   - $DA^2 = (-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 3 + 8 = 12$
   - $DB^2 = (-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 3 + 8 = 12$
   - $DC^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 + 8 = 12$

   Donc les six arêtes du tétraèdre ABCD ont la même longueur, donc le tétraèdre ABCD est **régulier**. (1 pt)

Exercice III

1. (a) $u_1 = \left(1 + \dfrac{2}{1}\right) u_0 + \dfrac{6}{1} = 3 \times 5 + 6 = \boxed{21}$. (0,5 pt)

   (b) On obtient : $d_1 = u_1 - u_0 = 16$, $d_2 = u_2 - u_1 = 24$, puis $d_3 = 32$, $d_4 = 40$, $d_5 = 48$.
   On peut donc conjecturer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique de raison 8 et de premier terme** 16. (0,5 pt)

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   On sait que, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = 16 + 8n = 8(n+2)$.
   La somme S_n des n premiers termes est : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = n \times v_0 + 8 + 2 \times 8 + \cdots + (n-1) \times 8 = 16n + 8 \times \dfrac{n(n-1)}{2} = 16n + 4n(n-1) = \boxed{4n^2 + 12n}$. (1 pt)

3. **Démonstration par récurrence** :
   — **Initialisation** : $u_0 = 5$: vrai
   — **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
   Alors $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right) u_n + \dfrac{6}{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right)\left(4n^2 + 12n + 5\right) + \dfrac{6}{n+1}$.
   Or $4n^2 + 12n + 5 = 4(n+1)^2 - 8n - 4 + 12n + 5 = 4(n+1)^2 + 4n + 1 = 4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3$. En reportant dans u_{n+1} au dessus, on obtient :
   $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right)\left[4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3\right] + \dfrac{6}{n+1} =$
   $4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3 + 8(n+1) + 8 - \dfrac{6}{n+1} + \dfrac{6}{n+1} = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5$.
   La relation est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : on vient de démontrer par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
   $\boxed{u_n = 4n^2 + 12n + 5}$. (1 pt)

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad$ d'après les questions précédentes, on déduit que : $d_n = u_{n+1} - u_n = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5 - \left(4n^2 + 12n + 5\right) = 4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 - 4n^2 - 12n - 5 = 8n + 16 = v_n$.
   Conclusion : la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison 8 et de premier terme $d_0 = 16$. (1 pt)

Exercice IV

PARTIE A :

1. On effectue une démonstration par récurrence :
   - Initialisation : $u_0 = 1 + \dfrac{12}{5^0} = 1 + 12 = 13$: vrai;
   - Hérédité : supposons qu'il existe un naturel $p > 0$ tel que $u_p = 1 + \dfrac{12}{5^p}$; alors $u_{p+1} = \dfrac{1}{5}u_p + \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{12}{5^p}\right) + \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{12}{5^{p+1}} = 1 + \dfrac{12}{5^{p+1}}$: l'hérédité est bien démontrée.

   On a donc pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{12}{5^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. (1 pt)

2. (a) On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. Par une récurrence immédiate, on a $u_n > 0$, ce qui entraîne que la suite (S_n) est **croissante**. (0,5 pt)

   (b) D'après la question **1.**, $S_n = 1 + \dfrac{12}{5^0} + \cdots + 1 + \dfrac{12}{5^n} = (n+1) \times 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{12}{5^k} = (n+1) + 12\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{5^k}$.

   Le deuxième terme de la somme précédente est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$, soit avec $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{5^k}$,

   $\dfrac{1}{5}T_n = \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{5^n} + \dfrac{1}{5^{n+1}}$ et par différence $\dfrac{4}{5}T_n = 1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}$ et enfin $T_n = \dfrac{5}{4}\left(1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}\right)$. D'où $12\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{5^k} = 12 \times \dfrac{5}{4}\left(1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}\right) = 15\left(1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}\right) = 15 - \dfrac{3}{5^n}$

   On a donc :

   $$\boxed{S_n = (n+1) + 15 - \dfrac{3}{5^n} = n + 16 - \dfrac{3}{5^n}.}$$

   (c) La limite de la suite est celle de n, donc égale à $\boxed{+\infty}$. (1,5 pt)

PARTIE B :

Proposition 1 : **Fausse** : la suite (x_n) de l'exercice ci-dessus est convergente, alors que (S_n) diverge. (1 pt)

Proposition 2 : **Fausse** : la suite (x_n) de l'exercice ci-dessus est décroissante car la suite de terme général $\dfrac{1}{5^n}$ l'est et on a vu que la suite (S_n) est croissante. (1 pt)