TS : correction du devoir sur feuille n° 2

I Fonction d'Ackermann

Cette fonction A est une fonction de deux entiers naturels, dfinie ainsi :

- $A(0\,;\,n) = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $A(m+1\,;\,0) = A(m\,;\,1)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$
- $A(m+1\,;\,n+1) = A(m\,;\,A(m+1\,;\,n))$ pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. A(0; 0)=1; $A(0\,;\,1) = 2$; $A(1\,;\,0) = A(0\,;\,1) = 2$.
2. • La premire ligne se remplit facilement puisque $A(0\,;\,n) = n+1$ (dfinition de la fonction).
   - **Seconde ligne** :
     $A(1\,;\,0) = A(0\,;\,1) = 2$ par dfinition de la fonction.
     Pour tout $n \geqslant 0$, $A(1\,;\,n) = A(0\,;\,A(1\,;\,n-1)) = A(1\,;\,n-1)+1$ donc les cellules de la ligne « $m=1$ » sz remplissent en ajoutant 1 la cellule prcdente.
   - **Troisime ligne** :
     $A(2\,;\,0) = A(1\,;\,1) = 3$.
     $A(2,1) = A(1\,;\,A(2\,;\,0)) = A(1\,;\,3) = A(1\,;\,1)+2 = A(2\,;\,0)+2 = 5$
     $A(2,2) = A(1\,;\,A(2,1)) = A(1\,;\,5) = A(1\,;\,3)+2 = A(2\,;\,1)+2 = 7$
     $A(2,3) = A(1\,;\,A(2\,;\,2)) = A(1\,;\,7) = A(1\,;\,5)+2 = A(2\,;\,2)+2 = 9$
     $A(2\,;\,4) = A(1\,;\,A(2\,;\,3)) = A(1\,;\,9) = A(1\,;\,7)+2 = A(2,3)+2$.
     On devine que $A(2\,;\,n) = A(2\,;\,n)+2$ (suite arithmtique de raison 2)
   - **Quatrime ligne** :
     $A(3\,;\,0) = A(2\,;\,1) = 5$
     $A(3\,;\,1) = A(2\,;\,A(3\,;\,0)) = A(2\,;\,5) = 13$.
     On trouve de mme $A(3\,;\,2) = 29$, $A(3\,;\,3) = 61$; $A(3\,;\,4) = 1125$ et $A(3\,;\,5) = 255$

   Tableau de valeurs :

m \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	5	7	9	11	13
3	5	13	29	61	125	255

3. Pour n entier naturel, il semble que $A(1\,;\,n) = n+2$ (conjecture 1) et que $A(2\,;\,n) = 2n+3$ (conjecture 2).

   Dmonstration de la conjecture 1 par rcurrence :
   Initialisation : pour $n=0$, $A(1\,;\,0) = 2$ et $0+2=2$; la proprit est vraie pour $n=0$.
   Hrdit : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $A(1,k) = k+2$; montrons que $A(1\,;\,k+1) = k+3$.
   On a : $A(1\,;\,k+1) = A(0\,;\,A(1\,;\,k)) = A(0\,;\,k+2) = k+3$.
   Conclusion : la proprit est vraie pour n = 0 et est hrditaire donc, pour $n \geqslant 0$, $A(1\,;\,n) = n+2$.

   Dmonstration de la conjecture 2 par rcurrence :
   Initialisation : pour $n=0$, $A(2\,;\,0) = 3$ et $2\times 0+3 = 3$.
   La proprit est vraie pour $n=0$.
   Hrdit : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $A(2,k) = 2k+3$; montrons que $A(2,k+1) = 2(k+1)+3 = 2k+5$.
   On a :$A(2\,;\,k+1) = A(1\,;\,A(2\,;\,k)) = A(1\,;\,2k+3) = (2k+3)+2 = 2k+5$.
   Conclusion : la proprit est vraie pour $n=0$ et est hrditaire donc, pour $n \geqslant 0$, $\boxed{A(2,n+1) = 2n+3}$.
4. Montrons patr rcurrence que $A(3\,;\,n) = 2^{n+3}-5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation** : pour $n=0$, $A(3\,;\,0) = A(2\,;\,1) = 5$ et $2^{0+3}-3 = 8-3 = 5$.
     La proprit est vraie pour $n=0$.

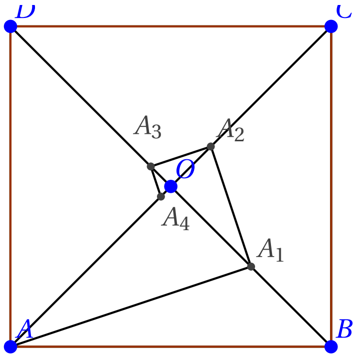
- **Hrdit** : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $A(3\,;\,k) = 2^{k+3} - 5$; montrons que $A(3\,;\,k+1) = 2^{k+4} - 3$.
  $A(3\,;\,k+1) = A(2\,;\,A(3\,;\,k)) = A(2\,;\,2^{k+3}+3) = 2 \times \left(2^{k+3}+3\right) - 3 = 2^{k+4} + 6 - 3 = 2^{k+4} + 3$.

Conclusion : la proprit est vraie pour n = 0 et est hrditaire donc, pour $n \geqslant 0$, $\boxed{A(3\,;\,n) = 2^{n+3} - 3}$.

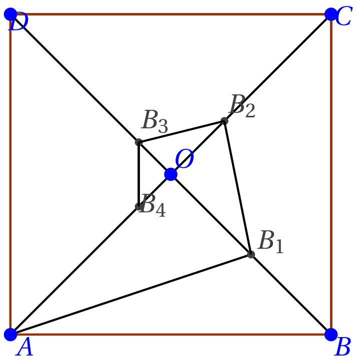
II Spirales

$ABCD$ est un carr de centre O dont les diagonales ont pour longueur 2.
On construit les deux spirales suivantes dont les sommets appartiennent aux diagonales du carr.

Spirale gomtrique : les distances de O aux sommets successifs $A_0 = A$, A_1, A_2, A_3, etc. valent 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc.



Spirale harmonique : Les distances de O aux sommets $B_0 = A$, B_1, B_2, B_3, B_4, etc sont 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.



On note L_n la longueur de la spirale $A_0A_1A_2\cdots A_n$ et L'_n la longueur de la spirale $B_0B_1B_2\cdots B_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Spirale gomtrique :

   Pour tout n, $OA_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en O; d'aprs le thorme de Pythagore, $AA_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2}}$
   $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

   On en dduit que, pour $n \geqslant 1$: $L_n = \frac{\sqrt{5}}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$ donc $L_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{5}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}$.

   $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \sqrt{5}}$

2. **Spirale harmonique** :

   Exprimer On a $OB_n = \frac{1}{n+1}$, donc, d'aprs le thorme de Pythagore : $\boxed{B_nB_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2}\right)^2}}$.

   Les deux spirales se ressemblent, donc on pourrait penser qu'elles ont le mme comportement asymptotique, donc que (L'_n) converge.

3. (a) Pour tout n, $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}\geqslant\dfrac{1}{(n+1)^2}$ donc $B_nB_{n+1}\geqslant\dfrac{1}{n+1}$.

On en dduit que $L'_n\geqslant h_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

(b) $\boxed{h_{2n}-h_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}}$.

Pour tout k tel que $n\leqslant k\leqslant 2n$, $k\leqslant n$ donc $\dfrac{1}{k}\geqslant\dfrac{1}{2n}$.

On en dduit que $h_n\geqslant\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n}+\cdots+\dfrac{1}{2n}=n\times\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

(c) On a successivement :

$k=2: h_4-h_2\dfrac{1}{2}$

$k=3: h_8-h_4\geqslant\dfrac{1}{2}$

$k=4: h_{16}-h_8=\dfrac{1}{2}$

$\vdots$

$k=2^{n-1}: h_{2^n}-h_{2^{n-1}}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

En additionnant membre membre, on trouve :

$h_{2^n}-h_2\geqslant\dfrac{1}{2}(n-1)$.

(d) On en dduit que $h_{2^n}\geqslant h_2+\dfrac{n-1}{2}$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ donc la suite (h_n) n'est pas majore et $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}L'_n=+\infty$

III Liban mai 2013

Question 1 :

Rponse d

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{d}(1,\ 2,\ 3)$, un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{d'}(1,\ 1,\ -1)$.
$\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{d'}=1+2-3=0$.
Ces deux vecteurs sont orthogonaux, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc orthogonales.
Aussi par Èlimination : la a. est fausse car les vecteurs directeurs ne sont pas colinaires, b. est fausse car il n'y a pas de point d'intersection et c. est fausse car C n'est pas sur D.

Question 2 :

Rponse c

Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,1,-1)$.
Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$.
Ce qui entraîne que ce plan est orthogonal la droite $\mathscr{D}'$.

Question 3 :

Rponse c

$AB=\sqrt{4+16+36}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$, $\quad AC=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56}$, $\quad BC=\sqrt{36+4+16}=\sqrt{56}$
Ces trois distances sont gales, il en rsulte que le triangle ABC est quilatral.

Question 4 :

Rponse b

Pour dterminer lequel de ces vecteurs est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$, il suffit de vrifier si ces vecteurs sont orthogonaux deux vecteurs de $\mathscr{P}'$ qui sont non colinaires.

Prenons $\overrightarrow{d'}(1,\ 1,\ -1)$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{AD}'}$, o˘ A$(1,\ -1,\ 2)$ et D$'$ est un point de $\mathscr{D}'$, par exemple celui de coordonnes $(1,\ 3,\ 4)$, soit $\overrightarrow{\text{AD}'}(0,\ 4,\ 2)$.

On vrifie que $\overrightarrow{d'}$ et $\overrightarrow{\text{AD}'}$ ne sont pas colinaires, et on constate que, dans le second cas :

$$\overrightarrow{d'}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\text{AD}'}\cdot\overrightarrow{n} = 0$$

Ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{n}(3,\ -1,\ 2)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$.

IV Antille-Guyane septembre 2011

1. (a) $\overrightarrow{\text{AB}}(2\ ;\ -8\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{\text{AC}}(3\ ;\ 0\ ;\ 1)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinaires, dont les trois points distincts A, B et C dfinissent un plan.

   (b) On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 2-8+6 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 3-3 = 0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal deux vecteurs non colinaires du plan (ABC) est donc un vecteur normal au plan (ABC).

   (c) On sait que $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ABC}) \iff 1x+1y-3z+d = 0$. En particulier $\text{C}(2\ ;\ 2\ ;\ 2) \in (\text{ABC}) \iff 1\times 2+1\times 2-3\times 2+d = 0 \iff d = 2$.
   Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ABC}) \iff \boxed{x+y-3z+2=0}$.

2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{p}(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (P).
   Or $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{p}$ ne sont pas colinaires, ce qui signifie que les plans (ABC) et P ne sont pas parallles donc scants.

   (b) $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in D \iff M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z+2 & = & 0 \\ x-y+z-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3t-2 \\ x-y & = & -t+4 \quad (1) \\ z & = & t \end{array}\right. \Rightarrow 2x = 2t+2 \iff x = t+1$.
   En remplaçant dans l'quation (1) $y = x+z-4 = z+1+z-4 = 2t-3$.
   Finalement : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in D \iff \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+1 \\ y & = & 2t-3 \\ z & = & t \end{array}\right.}$

3. (a) Le point de D correspondant $t = 1$ est le point I.

   (b) Calculons $\Omega\text{I}^2 = (2-3)^2+(-1-1)^2+(1-3)^2 = 1+4+4 = 9$, donc $\Omega\text{I} = 3$: le point I appartient la sphre S.

   (c) Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient S si et seulement si $\Omega M^2 = 9 \iff (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = 9$.
   Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient D et S si et seulement si ses coordonnes vrifient les quations : $\left\{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \\ (x-3)^2+(y-1)^2 \end{array}\right.$
   $\Rightarrow (1+t-3)^2+(-3+2t-1)^2+(t-3)^2 = 9 \iff t^2+4-4t+4t^2+16-16t+t^2+9-6t = 9 \iff 6t^2-26t+20 = 0 \iff 3t^2-13t+10 = 0$.
   On sait que I appartient S donc $t = 1$ est une des des solutions de l'quation du second degr.
   Or $3t^2-13t+10 = (t-1)(3t-10)$; donc l'autre solution est donne par $3t-10 = 0 \iff t = \dfrac{10}{3}$, valeur du paramtre qui conduit $\boxed{J\left(\dfrac{13}{3}\ ;\ \dfrac{11}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\right)}$.