

## I

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-x}$ .

### Partie A

1. On justifie les informations du tableau de variations de  $f$  donné ci-dessous :

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x)$			

- La dérivée de  $f$  est  $f'(x) = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = (1-x)e^{-x}$ .  
 Pour tout  $s$ ,  $e^{-s} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $1-x$ , donc  $f'(x) > 0$  sur  $[0; 1[$  et  $f'(x) < 0$  sur  $]1; +\infty[$ . Donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ , et elle est strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

- $f(0) = 0$

- On détermine la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

$$f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}; \text{ on sait que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2. Soit  $F$  la fonction définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$  par  $F(x) = (-x-1)e^{-x}$ .

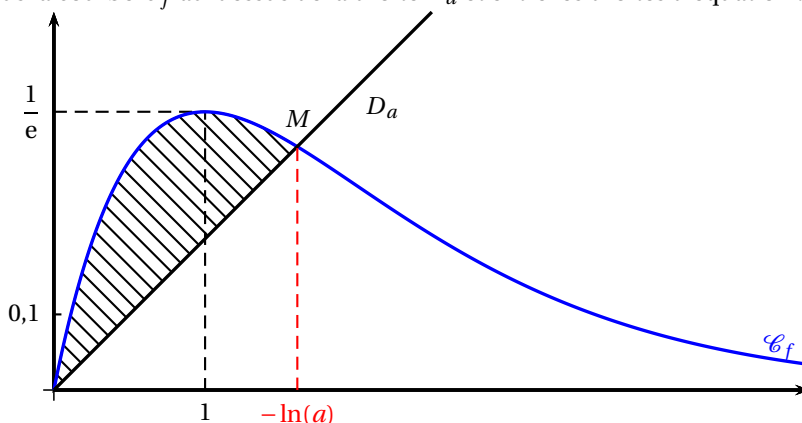
$$F'(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-1)(-1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x} = f(x)$$

Donc la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

### Partie B

Soit  $a$  un nombre réel tel que  $0 < a < 1$ . On considère la droite  $D_a$  d'équation  $y = ax$  et  $M$  le point d'intersection de la droite  $D_a$  avec la courbe  $\mathcal{C}_f$ . On note  $x_M$  l'abscisse du point  $M$ .

On note  $\mathcal{H}(a)$  l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe  $\mathcal{C}_f$  au-dessus de la droite  $D_a$  et entre les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = x_M$ .



1. La droite  $D_a$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  se coupent en des points dont les abscisses sont solutions de l'équation  $ax = xe^{-x}$ . On résout cette équation :

$$ax = xe^{-x} \iff ax - xe^{-x} = 0 \iff x(a - e^{-x}) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } a - e^{-x} = 0 \iff x = 0 \text{ ou } a = e^{-x} \\ \iff x = 0 \text{ ou } \ln(a) = -x \iff x = 0 \text{ ou } x = -\ln(a)$$

Donc la droite  $D_a$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  se coupent au point  $O$  et en un autre point d'abscisse  $-\ln(a)$ .

On admet dans la suite de l'exercice que le point  $M$  a pour abscisse  $x_M = -\ln(a)$  et que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de la droite  $D_a$  sur l'intervalle  $[0; -\ln(a)]$ .

2. La courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de la droite  $D_a$  sur l'intervalle  $[0; -\ln(a)]$ , donc l'aire  $\mathcal{H}(a)$  du domaine hachuré est  $\int_0^{-\ln(a)} (f(x) - ax) \, dx$ .

$$\mathcal{H}(a) = \int_0^{-\ln(a)} (f(x) - ax) \, dx = \int_0^{-\ln(a)} f(x) \, dx - \int_0^{-\ln(a)} ax \, dx = [F(x)]_0^{-\ln(a)} - \left[ a \frac{x^2}{2} \right]_0^{-\ln(a)}$$

$$= \left[ (\ln(a) - 1)e^{-(-\ln(a))} - (-1)e^0 \right] - \left[ a \frac{(\ln(a))^2}{2} - 0 \right] = a \ln(a) - a + 1 - \frac{1}{2} a (\ln(a))^2$$

3. Soit la fonction  $\mathcal{H}$  définie sur  $]0 ; 1]$  par  $\mathcal{H}(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x (\ln(x))^2 + 1 - x$ .

On admet que  $\mathcal{H}$  est dérivable sur  $]0 ; 1]$  et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous.

$x$	0	1
$\mathcal{H}(x)$	1	0

La fonction  $\mathcal{H}$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $]0 ; 1]$ . D'après le tableau de variations,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \mathcal{H}(x) = 1$  et  $\mathcal{H}(1) = 0$ . Or  $0,5 \in ]0 ; 1[$ , donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $\mathcal{H}(x) = 0,5$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0 ; 1[$ .

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

VARIABLES :	$A, B$ et $C$ sont des nombres; $p$ est un entier naturel.								
INITIALISATION :	Demander la valeur de $p$ $A$ prend la valeur 0 $B$ prend la valeur 1								
TRAITEMENT :	Tant que $B - A > 10^{-p}$ <table style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>C</math> prend la valeur <math>(A + B)/2</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">Si <math>\mathcal{H}(C) &gt; 0,5</math></td> <td style="padding-left: 5px;">Alors <math>A</math> prend la valeur de <math>C</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td style="padding-left: 5px;">Sinon <math>B</math> prend la valeur de <math>C</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td style="padding-left: 5px;">Fin de la boucle Si</td> </tr> </table> Fin de la boucle Tant que	$C$ prend la valeur $(A + B)/2$		Si $\mathcal{H}(C) > 0,5$	Alors $A$ prend la valeur de $C$		Sinon $B$ prend la valeur de $C$		Fin de la boucle Si
$C$ prend la valeur $(A + B)/2$									
Si $\mathcal{H}(C) > 0,5$	Alors $A$ prend la valeur de $C$								
	Sinon $B$ prend la valeur de $C$								
	Fin de la boucle Si								
SORTIE :	Afficher $A$ et $B$ .								

Cet algorithme, dit de « dichotomie », permet de déterminer un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à  $10^{-p}$  de la solution de l'équation  $\mathcal{H}(x) = 0,5$ ; le nombre  $A$  est la borne inférieure de l'encadrement, le nombre  $B$  en est la borne supérieure.

5. On utilise la calculatrice pour déterminer les encadrements suivants :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \mathcal{H}(x) = 1 \\ \mathcal{H}(0,1) \approx 0,40 < 0,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in ]0 ; 0,1[ \qquad \left. \begin{array}{l} \mathcal{H}(0,06) \approx 0,534 > 0,5 \\ \mathcal{H}(0,07) \approx 0,496 < 0,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in ]0,06 ; 0,07[$$

## II

1. La durée de vie  $T$  (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  où  $\lambda > 0$ .

On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne  $E(T)$  de quatre ans; or  $\lambda = \frac{1}{E(T)}$  donc  $\lambda = 0,25$ .

D'après le cours, si une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , alors  $P(X < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

On cherche  $P_{(T \geq 3)}(T \geq 3 + 2)$ .

La loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc  $P_{(T \geq 3)}(T \geq 3 + 2) = P(T \geq 2)$ .

$$P(T \geq 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - (1 - e^{-0,25 \times 2}) = e^{-0,25 \times 2} \approx 0,61 \neq 0,39.$$

Cette affirmation est **fausse**.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On résout dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$ .

$$z^3 - 3z^2 + 3z = z(z^2 - 3z + 3) \text{ donc (E) } \Leftrightarrow z(z^2 - 3z + 3) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z^2 - 3z + 3 = 0$$

On résout dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E') :  $z^2 - 3z + 3 = 0$  :  $\Delta = 9 - 12 = -3$  donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Soit A le point d'affixe  $z_1$  et B le point d'affixe  $z_2$ .

$$\bullet \text{ OA} = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

•  $OB = |z_2| = |z_1|$  car  $z_1$  et  $z_2$  sont deux nombres complexes conjugués, donc  $OB = \sqrt{3}$ .

•  $AB = |z_2 - z_1| = \left| \frac{3 - 1\sqrt{3}}{2} - \frac{3 + 1\sqrt{3}}{2} \right| = \left| -1\sqrt{3} \right| = \sqrt{3}$

$OA = OB = AB$  donc les trois solutions de l'équation (E) sont les affixes de trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Cette affirmation est **vraie**.

### III

Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes (A, B, C et D) sont au programme.

#### Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A.

On veut tester l'hypothèse « il y a une chance sur deux ( $p = 0,5$ ) que le thème A soit évalué le jour de l'examen » dans un échantillon de taille  $n = 34$ .

$n = 34 \geq 30$  et  $np = n(1-p) = 17 \geq 5$  donc les conditions sont vérifiées pour que l'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion que le thème A soit évalué le jour de l'examen :

$$I = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,5 - 1,96 \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{34}} ; 0,5 + 1,96 \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{34}} \right] \approx [0,33 ; 0,67]$$

La fréquence dans l'échantillon est de  $f = \frac{22}{34} \approx 0,65 \in I$  donc il n'y a pas de raison de rejeter l'affirmation proposée.

#### Partie B

Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.

Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :

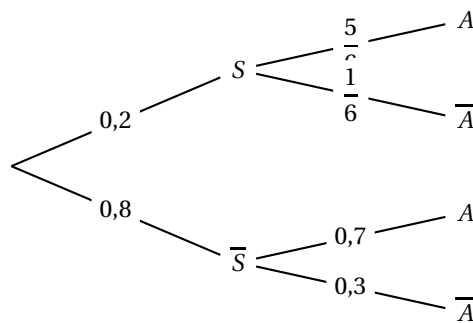
- 30% des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\frac{5}{6}$  des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que 20% des étudiants participent au stage.

On note :

- $S$  l'évènement « l'étudiant a suivi le stage » et  $\bar{S}$  son évènement contraire ;
- $A$  l'évènement « il y a un exercice portant sur le thème A » et  $\bar{A}$  son évènement contraire.

On établit un arbre de probabilité résumant la situation :



On cherche  $P_{\bar{A}}(S)$  c'est-à-dire  $\frac{P(S \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$ .

D'après l'arbre :  $P(S \cap \bar{A}) = P(S) \times P_S(\bar{A}) = 0,2 \times \frac{1}{6} = \frac{0,2}{6} = \frac{1}{30}$ .

D'après la formule des probabilités totales :  $P(\bar{A}) = P(S \cap \bar{A}) + P(\bar{S} \cap \bar{A}) = \frac{1}{30} + 0,8 \times 0,3 = \frac{1}{30} + \frac{24}{100} = \frac{41}{150}$ .

$P_{\bar{A}}(S) = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{41}{150}} = \frac{1}{30} \times \frac{150}{41} = \frac{5}{41} \approx 0,122$ .

## Partie C

On suppose que la variable aléatoire  $T$ , associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance  $\mu = 225$  et d'écart-type  $\sigma$  où  $\sigma > 0$ . La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de 0,98.

On sait que  $P(T \leq 235) = 0,98$  sachant que  $T$  suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type  $\sigma$ .

D'après le cours, si  $T$  suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type  $\sigma$ , alors  $Z = \frac{T-225}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite (moyenne 0 et écart-type 1).

$$T \leq 235 \iff T - 225 \leq 10 \iff \frac{T-225}{\sigma} \leq \frac{10}{\sigma} \text{ car } \sigma > 0; \text{ donc } P(T \leq 235) = 0,98 \iff P\left(\frac{T-225}{\sigma} \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 0,98.$$

On cherche donc le réel  $\beta$  tel que  $P(Z \leq \beta) = 0,98$  sachant que  $Z$  suit la loi normale centrée réduite.

On trouve à la calculatrice  $\beta \approx 2,054$ .

On en déduit que  $\frac{10}{\sigma} \approx 2,054$  donc que  $\sigma \approx 4,9$ .

## IV

On considère la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n \geq 0.$$

On peut conjecturer que, pour tout  $n$ ,  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $u_n = \frac{n}{n+1}$ . Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $n$ .

### • Initialisation

Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = 0$  et  $\frac{0}{0+1} = 0$  donc la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .

### • Hérité

On suppose que la propriété est vraie pour un entier  $k$  quelconque :  $u_k = \frac{k}{k+1}$ .

On va démontrer qu'elle est vraie au rang  $k+1$  soit  $u_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ .

$$u_{k+1} = \frac{1}{2-u_k} = \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2(k+1)-k}{k+1}} = \frac{k+1}{2k+2-k} = \frac{k+1}{k+2}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $k+1$ .

### • Conclusion

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour  $n = 0$  et elle est héréditaire pour tout  $n$ . Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

On peut donc dire que, pour tout  $n$ ,  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

On cherche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Pour  $n \neq 0$  :  $\frac{n}{n+1} = \frac{n \times 1}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ .

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

## V

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; I, J, K)$ .

On considère les points  $A(-1; -1; 0)$ ,  $B(6; -5; 1)$ ,  $C(1; 2; -2)$  et  $S(13; 37; 54)$ .

1. (a)  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ;  $7 \times \frac{2}{7} = 2$  et  $-4 \times \frac{2}{7} \neq 3$  donc les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent bien un plan dont  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont deux vecteurs directeurs.

(b) Soit le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$ .

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 5 \times 7 + 16 \times (-4) + 29 \times 1 = 35 - 64 + 29 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{AB}.$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 5 \times 2 + 16 \times 3 + 29 \times (-2) = 10 + 48 - 58 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{AC}.$$

Donc le vecteur  $\vec{n}$  est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc le vecteur  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan (ABC).

(c) Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que  $\vec{AM}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux.

Si M a pour coordonnées (x ; y ; z), alors  $\vec{AM}$  a pour coordonnées (x + 1 ; y + 1 ; z).

$$\vec{AM} \perp \vec{n} \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 5(x+1) + 16(y+1) + 29z = 0 \iff 5x + 16y + 29z + 21 = 0$$

Le plan (ABC) a pour équation  $5x + 16y + 29z + 21 = 0$ .

2. (a)  $AB^2 = \|\vec{AB}\|^2 = 7^2 + (-4)^2 + 1^2 = 49 + 16 + 1 = 66$

$$AC^2 = \|\vec{AC}\|^2 = 2^2 + 3^2 + (-2)^2 = 4 + 9 + 4 = 17$$

$$BC^2 = (1-6)^2 + (2+5)^2 + (-2-1)^2 = 25 + 49 + 9 = 83$$

$66 + 17 = 83$  ce qui équivaut à  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

(b) Le triangle ABC est rectangle en A donc son aire vaut  $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{66} \times \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{1122}}{2}$ .

3. (a) Les points A, B, C et S sont coplanaires si et seulement si le point S appartient au plan (ABC).

Le plan (ABC) a pour équation  $5x + 16y + 29z + 21 = 0$ .

$$5x_S + 16y_S + 29z_S + 21 = 5 \times 13 + 16 \times 37 + 29 \times 54 + 21 = 1705 \neq 0 \text{ donc } S \notin (ABC).$$

Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

(b) La droite ( $\Delta$ ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par S coupe le plan (ABC) en un point noté H.

La droite ( $\Delta$ ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur  $\vec{n}$ . Donc le vecteur  $\vec{SH}$  est colinéaire au vecteur  $\vec{n}$  donc le vecteur  $\vec{SH}$  a pour coordonnées (5k ; 16k ; 29k) où k est un réel. Si le point H a pour coordonnées (x<sub>H</sub> ; y<sub>H</sub> ; z<sub>H</sub>), le vecteur  $\vec{SH}$  a pour coordonnées (x<sub>H</sub> - 13 ; y<sub>H</sub> - 37 ; z<sub>H</sub> - 54).

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} x_H = 13 + 5k \\ y_H = 37 + 16k \\ z_H = 54 + 29k \end{cases}$$

On exprime que H appartient au plan (ABC), ce qui va permettre de déterminer la valeur de k :

$$5x_H + 16y_H + 29z_H + 21 = 0 \iff 5(13 + 5k) + 16(37 + 16k) + 29(54 + 29k) + 21 = 0$$

$$\iff 65 + 25k + 592 + 256k + 1566 + 841k + 21 = 0$$

$$\iff 2244 + 1122k = 0 \iff k = -2$$

$$\text{Donc le point H a pour coordonnées : } \begin{cases} x_H = 13 + 5(-2) = 3 \\ y_H = 37 + 16(-2) = 5 \\ z_H = 54 + 29(-2) = -4 \end{cases}$$

4. Le volume du tétraèdre SABC est  $\frac{\text{aire}(ABC) \times SH}{3}$ .

Le vecteur  $\vec{SH}$  a pour coordonnées (5k ; 16k ; 29k) donc (5(-2) ; 16(-2) ; 29(-2)) = (-10 ; -32 ; -58). Donc  $SH^2 = (-10)^2 + (-32)^2 + (-58)^2 = 4488$  et donc  $SH = \sqrt{4488} = 2\sqrt{1122}$ .

$$\text{aire}(ABC) = \frac{\sqrt{1122}}{2} \text{ donc le volume du tétraèdre est } \frac{\frac{\sqrt{1122}}{2} \times 2\sqrt{1122}}{3} = \frac{1122}{3} = 374 \text{ unités de volume.}$$