Correction de la feuille 2

I Métropole-Réunion juin 2016

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$.

Partie A

1. $f(x) = x \iff \ln\left(x^2+1\right) = 0 \iff x^2+1 = 1 \iff x = 0$: l'équation a pour solution le nombre 0.
2. f est dérivable somme somme et composée de fonctions dérivables.

   $f = u - \ln(v)$ donc $f' = u' - \dfrac{v}{v'}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = x^3+1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.

   On en déduit que $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \boxed{\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} \leqslant 0}$ avec $f'(x) = 0$ pour $x = 1$.

   f est donc bien croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(1) = 0$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{X\to-\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$.
3. Soit x un réel de $[0\ ;\ 1]$; f est croissante sont $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$;

   Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(2) < 1$ donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$;

   Pour tout x appartenant à $[0\ ;\ 1]$, $f(x)$ appartient à $[0\ ;\ 1]$.
4. (a) Cet algorithme donne le plus petit entier pour lequel $N - \ln\left(N^2+1\right) \geqslant A$.

   (b) À la calculatrice, on trouve $\boxed{n = 110}$

Partie B

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) = f(u_n)$.

1. Montrons par récurrence que u_n appartient à $[0\ ;\ 1]$ pour tout n.
   - Initialisation : $u_0 = 1 \in [0.1]$
   - Hérédité : on suppose que $u_n \in [0\ ;\ 1]$ pour un entier n quelconque.

     D'après A.4), on en déduit que $u_{n+1} \in [0\,;\,1]$; la propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.
2. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right) \leqslant 0$ car $u_{n+1}^2 + 1 \geqslant 1$.

   La suite est donc **décroissante**.
3. D'après 1., la suite est minorée et on vient de voir qu'elle est décroissante, donc elle est convergente vers un réel $\ell \geqslant 0$.
4. On admet que $f(\ell) = \ell$.

   On en déduit que $\ell = 0$ d'après A 1.

II Polynésie juin 2015

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1.

Variables :	$n,\ k$ entiers
	$S,\ v$ réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur $\ln(2)$
	S prend la valeur v
Traitement :	Pour k variant de 2 à n faire
	v prend la valeur $\ln\left(2-\mathrm{e}^{v_n}\right)$
	S prend la valeur $S+v$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. D'après les valeurs affichées il semble que la suite (S_n) soit croissante.

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

1. On a $u_1 = \mathrm{e}^{v_1} = \mathrm{e}^{\ln(2)} = 2$.
   Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{v_{n+1}} = \mathrm{e}^{\ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right)} = \left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right) =$
   $2-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{v_n}} = 2-\dfrac{1}{u_n} = u_{n+1}$.
2. D'après le résultat précédent :
   $u_2 = 2-\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$;
   $u_3 = 2-\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$;
   $u_4 = 2-\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$.
3. Démonstration par récurrence :
   Initialisation : la relation est vraie pour $n = 4$;
   Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel $p > 4$ tel que $u_p = \dfrac{p+1}{p}$.
   On a $u_{p+1} = 2-\dfrac{1}{u_p} = 2-\dfrac{p}{p+1} = \dfrac{2p+2-p}{p+1} = \dfrac{p+2}{p+1}$: la relation est donc vraie au rang $p+1$.
   On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \mathrm{e}^{v_n} \Rightarrow v_n = \ln u_n$.
   De la question précédente on peut écrire :
   $v_n = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1)-\ln n$.
2. $S_3 = v_1+v_2+v_3 = \ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3 = \ln 4-\ln 1 = \ln 4$.
3. $S_n = v_1+v_2+\cdots+v_n = \ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3+\cdots+\ln n-\ln(n+1)+\ln(n+1)-\ln n = \ln(n+1)$.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. La suite (S_n) est divergente.